Рыжов Александр Павлович

Элементы теории нечетких множеств и ее приложений

Москва 2003

0.1 Предисловие к электронному изданию

Данное публикация является переизданием монографии А.П. Рыжов *"Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости"*, Москва, Диалог-МГУ, 1998. В тексте лишь исправлены некоторые опечатки и неточности.

Электронная публикация подготовлена по многочисленным запросам студентов и аспирантов МГУ им. М.В. Ломоносова и других ВУЗов, а также научных работников и специалистов, занимающихся теорией нечетких множеств и созданием систем обработки нечеткой информации.

Подготовка публикации также продиктована следующими причинами. С одной стороны, упомянутая выше монография вышла ограниченным тиражом и в настоящее время является практически недоступной (библиотеки предоставляют ее только для работы в читальном зале). С другой стороны, интерес к теории нечетких множеств и ее приложениям за время, прошедшее после выпуска книги, значительно вырос. Студенты и специалисты, использующие в своей работе ИНТЕРНЕТ, это наблюдают непосредственно. Приведем лишь несколько примеров, иллюстрирующих этот факт.

В области науки можно отметить рост числа диссертационных работ, в которых изучаются различные аспекты теории нечетких множеств и ее приложений (например[1], Вдовичев С.В. *"Методы и алгоритмы интеллектуальных технологий в управлении техническими системами"*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Московский государственный институт электронной техники - технический университет, Мосвка, 1998, 147 с.; Нгуен Т.А. *"Приближенные рассуждения на основе триангулярных норм в нечеткой стратегии решения проблем"*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Московский энергетический институт (технический университет), Москва, 2002, 135 с.; Кулиев Б.О. *"Алгоритмы и структуры теории нечетких множеств в исследовании некоторых экономических и игровых моделей"*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2003, 94 с.; Петровский М.И. *"Исследование и разработка алгоритмов поиска исключений в системах интеллектуального анализа данных"*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2003, 145 с.; Комарцова Л.Г. *"Исследование нейросетевых и гибридных методов и технологий в интеллектуальных системах поддержки принятия решений"*, Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, Московский энергетический институт (технический университет), Москва, 2003, 264 с.). Заде[2] приводит цифры роста числа публикаций, использующих термин *"нечеткий"* в названии, представленные в таблице 0.1 (INSPEC - является ведущим информационным изданием, предоставляющим библиографическую и реферативную информацию по всем областям физики, электроники, энергетики, компьютерной технологии и др.; MathSciNet - база данных библиографической информации и обзоров Американского математического общества (American Mathematical Society)).

В области технологий можно отметить появление принципиально новых средств анализа слабоструктурированной, фрагментарной, неполной, нечеткой информации.

[1] Перечислены только диссертации, для которых автор был официальным оппонентом

[2] Частная переписка, 22 апреля 2003 года

Таблица 1: Количество статей, использующих слово *"нечеткий"* в названии

Года	INSPEC	MathSciNet
1970 - 1979	569	443
1980 - 1989	2404	2466
1990 - 1999	23207	5472
2000 - 2002	8745	2319
Всего:	34925	10700

К таким средствам можно отнести технологию информационного мониторинга сложных проблем/процессов (см., например, Ryjov, A., Belenki, A., Hooper, R., Pouchkarev, V., Fattah, A. and Zadeh, L.A. *Development of an Intelligent System for Monitoring and Evaluation of Peaceful Nuclear Activities (DISNA)*, IAEA, STR-310, Vienna, 1998, 122 p.) и средства Business Intelligence (см., например, Артемьев В. Что такое Business Intelligence? *Открытые системы*, №4, 2003, с. 20 - 26.) Использование такого рода инструментария в международных и государственных организациях и крупных корпорациях показало их эффективность и огромный потенциал для задач бизнеса, политологии, социологии и т.п. Несомненно, мы будем свидетелями развития такого рода технологий в ближайшее время.

Перечисление областей приложений нечетких систем заняло бы не одну страницу. Это все задачи, где в процессах получения, обработки, анализа и интерпретации результатов участвует человек. С последними "фронтами" приложений можно ознакомиться, например, по ссылке http://www.cs.berkeley.edu/projects/Bisc/.

Автор искренне надеется, что доступность данной публикации привлечет новых исследователей и разработчиков в область теории и приложений нечетких множеств.

Электронная версия монографии подготовлена к публикации на веб-сервере «Интеллектуальные системы» кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Электронный адрес автора: ryjov@mech.math.msu.su

А.П. Рыжов
Москва, 2003 год.

Оглавление

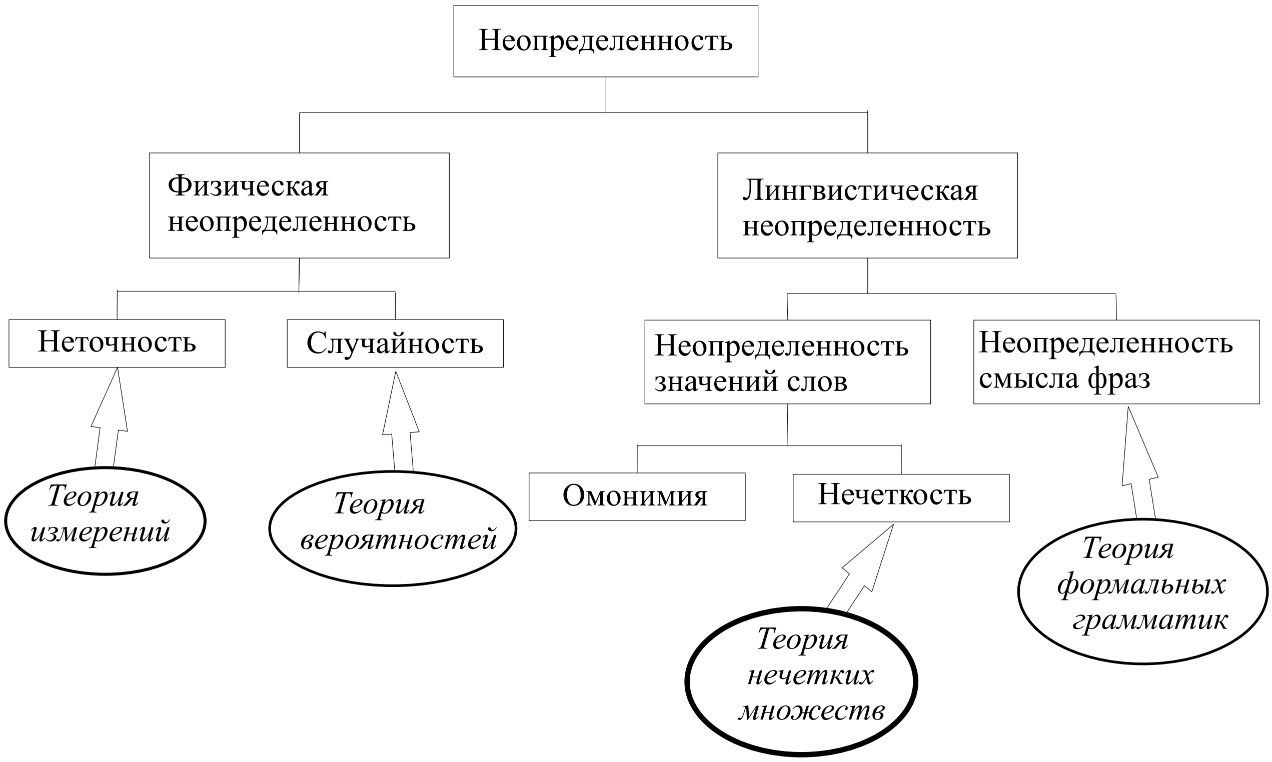

Рис. 1:

0.2 Предисловие

Любая наука занимается изучением определенных моделей реального мира. Даже описывая что-то словами, мы на самом деле формулируем модель некоторого реального объекта, события и т.п. на естественном языке.

Соотношение реального объекта и его модели - старый философский вопрос, который можно сформулировать как проблему соотношения некоторого объекта и нашего знания о нем. На эту тему написано огромное количество книг, но мы не будем заниматься этими проблемами. Отметим лишь, что при рассмотрении этого вопроса почти все философские школы сходятся в одном: модель есть не совсем точное описание объета (”грубое”, ”исаженное” и т.п.).

Итак, модель не есть эквивалент объекта. Модель всегда является более бедной. Поэтому в модели присутствует неопределенность, которую необходимо учитывать при переносе выводов, полученных при ее анализе, на реальный объект.

Мы упомянули очень важное слово неопределенность. Это также сложное философское понятие. Мы затронем его лишь на уровне структуры понятия. Можно привести следующую классификацию неопределенности (Рис. 1).

Отметим, что разные типы неопределенности имеют средства поддержки обработки информации, обладающей ими (Рис. 1).

Физическая неопределенность описывает неопределенность объектов реального мира с точки зрения наблюдателя. Так, неточность связана с возможностями измерительного оборудования. Например, если мы имеем шкалу с шагом 1 мм., мы не можем измерять размеры с точностью до микрона. В этом случае мы можем говорить о размерах с определенной точностью. Математической моделью обработки такого типа неопределенность является интервальная арифметика. С объектами, измерянными в различных шкалах, мы должны работать по-разному. Например, для ранговых или номинальных шкал арифметические операции (включая вычисление средних значений) не имеют смысла. Изучение подобных вопросов составляет предмет исследования теории измерений [35].

Теория вероятностей имеет дело с неопределенностью некоторых событий. Мы, например, можем спросить: "Какова вероятность того, что выйдя на улицу мы встретим человека роста 2 м.?" Ответ на этот вопрос зависит от распределения людей по росту (вобще говоря, в данном конкретном городе). Теория вероятностей, имеющая более 200 - летнюю историю, представляет, пожалуй, наиболее развитую теорию, ориентированную на обработку неопределенности. Однако, и это необходимо понимать, эта теория базируется на ряде предположений и гипотез, без проверки которых для данной конкретной проблемы мы не можем гарантировать адекватность выводов, полученных в рамках анализа модели, реальным объектам или процессам. Примерами таких требований могут быть:

- повторяемость событий;

- гарантии того, что наблюдаемые эффекты могут быть перенесены на все объекты или события данного типа (генеральную совокупность);

-независимость событий и т.п.

Теория формальных грамматик изучает неопределенность смысла фраз. Примером такого рода неопределенности может быть известное высказывание "Казнить нельзя помиловать". В зависимости от расположения запятой, смысл фразы меняется на противоположный. Язык формальных грамматик оказался очень удобным для решении ряда практических задач, например, в рамках распознавания образов [52].

Теория нечетких множеств есть некоторый аппарат формализации одного из видов неопределенности, возникающей при моделировании (в широком смысле этого слова, не только математическом) реальных объектов. Нечеткость возникает всегда, когда мы используем слова естественного языка при описании объекта. Последнее возникает всегда, когда мы пытаемся применять информационные технологии в " нетрадиционных" или "гуманитарных" областях, таких как медицина, экономика, управление (с участием или учетом свойств лица, принимающего решения), социология и пр. В рамках теории нечетких множеств разработан аппарат формализации содержательно значимых понятий, примерами которых являются "человек среднего роста", "устойчивая ситуация", "высокий уровень безопасности" и т.п.

Данная монография написана на основе курса лекций, который читался в течение ряда лет для студентов 2 - 5 курсов механико-математи-ческого факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Несмотря на значительный "возраст" теории нечетких множеств (первая статья по этому вопросу была опубликована в 1965 году [117]), систематизированное изложение некоторых ее аспектов в виде курса лекций для студентов математических факультетов МГУ им. М.В. Ломоносова было предпринято в начале 90 - х годов. Этому может быть много объяснений, основное из которых – значительное развитие прикладной части данного направления и относительная неразвитость математических основ.

К учебной литературе по теории нечетких множеств, изданной на русском языке, можно отнести лишь известную книгу ныне покойного А. Кофмана [21]. Это издание - первая из его четырех книг. Остальные, к сожалению, так и не были переведены на русский язык. Однако она, как отмечает автор, ориентирована на инженеров и студентов инженерных специальностей. Поэтому настоящяя монография имеет своей целью заполнить имеющийся пробел в данной области.

В работе вводятся и описываются свойства лишь основных объектов теории нечетких множеств: собственно понятие нечеткого множества, свойства множества нечетких подмножеств универсального множества, нечеткие отношения и некоторые их свойства, модели приближенных рассуждений. Основное внимание уделяется описанию методов измерения неопределенности нечетких объектов. Формулируются проблемы в этой области, не нашедшие своего решения в настоящее время. Систематизированное изложение этих аспектов теории нчетких множеств, имеющих важное значение как для теории так и для ложений нечетких систем (см., например, [104]), приводится впервые в научной литературе. Это является второй целью выпуска данной работы.

Пользуясь случаем, автор хотел бы поблагодарить сотрудников кафедры математической теории интеллектуальных систем и лаборатории проблем теоретической кибернетики механико – математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова и кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики за обсуждение структуры курса, весьма ценные замечания и поддержку при подготовке данной монографии. Заведующий кафедрой математической теории интеллектуальных систем и лаборатории проблем теоретической кибернетики академик АТН РФ профессор Валерий Борисович Кудрявцев многократно перечитывал рукопись; его советы, ремарки и замечания значительно изменили содержание и текст в лучшую сторону. Я хотел бы выразить искреннюю признательность Валерию Борисовичу за эту большую и кропотливую работу.

Выпуск данной работы стал возможет лишь при финансовой поддержке Федеральной Целевой Программы "Интеграция". В рамках проекта № 431 (направление 2.1) "Создание совместного научно-учебного центра "Интеллектуальные системы и нечеткие технологии", объединяющего ученых и преподавателей МГУ им. М.В. Ломоносова, ВЦ РАН и РГГУ, происходит чрезвычайно интересный и полезный для всех участников обмен идеями и результатами, формулируются и решаются новые задачи, читаются новые курсы лекций. Подготовка и выпуск данной монографии - один из результатов такой совместной работы. Ее концепция и содержание неоднократно обсуждались с директором центра компьютерных технологий в образовании профессором А.С. Строгаловым и заместителем заведующего отдела искусственного интеллекта ВЦ РАН членом - корреспондентом МАИ А.Н. Аверкиным. Автор хотел бы искренне поблагодарить их за полезное обсуждение работы и поддержку.

А.П. Рыжов.

Глава 1

Нечеткие множества и их свойства

1.1 Понятие нечеткого множества

Следуя Заде [117], введем понятие нечеткого множества следующим образом.

Пусть U - некоторое множество элементов u, и $\mu_A : U \to [0,1]$. Нечетким подмножеством A в U называется график отображения μ_A, то есть множество вида $\{(u, \mu_A(u)) : u \in U\}$; при этом значение $\mu_A(u)$ называется степенью принадлежности u к A.

Таким образом, задание нечеткого подмножества A в U эквивалентно заданию его функции принадлежности $\mu_A(u)$. Мы, следуя сложившейся традиции, будем употреблять темин "нечеткое множество" вместо более корректного термина "нечеткое подмножество".

Приведенное определение нечеткого множества является довольно общим. Поэтому при анализе и синтезе нечетких систем используются различные его частные случаи.

Приведем два примера нечетких множеств, точнее, функций принадлежностей, соответствующих им. Ими являются так называемые $s-$ и $\pi-$ функции, задаваемые так:

$$S(u;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad u \le \alpha, \\ 2\left(\frac{u-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{для} \quad \alpha \le u \le \beta, \\ 1-2\left(\frac{u-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^2 & \text{для} \quad \beta \le u \le \gamma, \\ 1 & \text{для} \quad u \ge \gamma. \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\pi(u;\beta,\gamma) = \begin{cases} S(u;\gamma-\beta,\gamma-\frac{\beta}{2},\gamma) & \text{для} \quad u \le \gamma, \\ S(u;\gamma,\gamma+\frac{\beta}{2},\gamma+\beta) & \text{для} \quad u \ge \gamma. \end{cases} \tag{1.2}$$

Их графики имеют вид, как указано на рис. 1.1 и 1.2.

Для частного случая, когда U является подмножеством числовой прямой, часто используются нечеткие множества $(L-R)-$ типа [72], [29]. Функции принадлежности для таких множеств задаются с помощью функций L и R, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) $L(0) = R(0) = 1$;

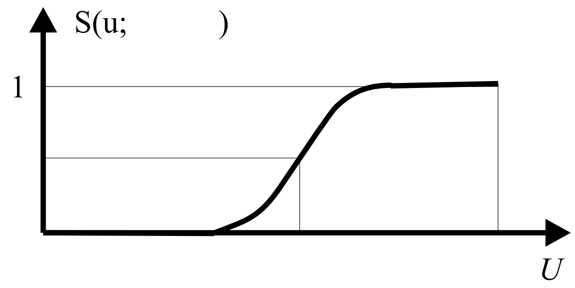

Рис. 1.1:

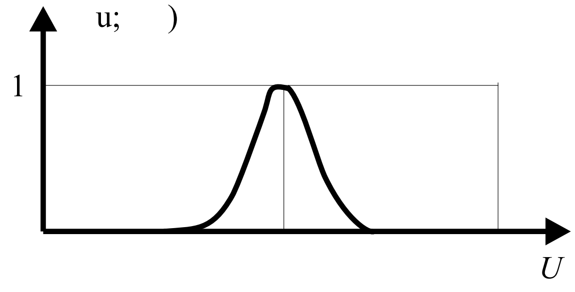

Рис. 1.2:

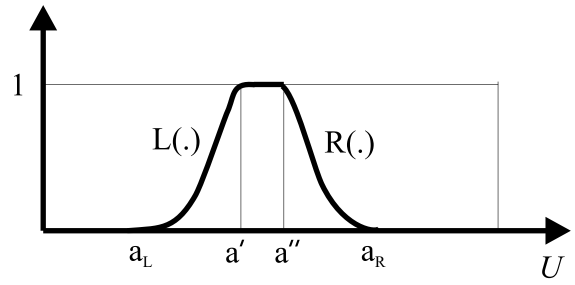

Рис. 1.3:

2) L и R - невозрастающие функции на множестве неотрицательных действительных чисел.

Пример 1 *Примеры функций L и R.*
1) $L(u) = e^{-|u|^p}, p \geq 0$*;*
2) $R(u) = \frac{1}{1+|u|^p}, p \geq 0$*;*
3) $L(u) = \begin{cases} 1 & \textit{при } u \in [-1, 1], \\ 0 & \textit{в противном случае} . \end{cases}$

Функция принадлежности нечеткого множества A, имеющая $(L-R)-$ тип, задается так:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} L\left(\frac{(a'-u)}{a_L}\right) & \text{при} \quad u \leq a', a_L > 0; \\ R\left(\frac{(u-a'')}{a_R}\right) & \text{при} \quad u \geq a'', a_R > 0; \\ 1 & \text{при} \quad u \in [a', a'']. \end{cases} \tag{1.3}$$

Иногда отрезок $[a', a'']$ называют интервалом толерантности, а a_L и a_R - левым и правым коэффициентом нечеткости соответственно. Пример функции принадлежности $(L-R)-$ типа представлен на рис. 1.3.

Функции принадлежности $s-$ и $\pi-$ типа являются частным случаем функций $(L-R)-$ типа.

Другим примером функций принадлежности $(L-R)-$ типа, используемых нами далее, доставляет предположение, что L и R являются линейными. В этом случае имеем:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0 \text{ при } u \leq a_L; & \\ \frac{u-a_L}{a'-a_L} & \text{при} \quad a_L \leq u \leq a'; \\ 1 \text{ при } a' \leq u \leq a''; & \\ \frac{a_R-u}{a_R-a''} & \text{при} \quad a'' \leq u \leq a_R; \\ 0 \text{ при } u \geq a_R. & \end{cases} \tag{1.4}$$

Такие функции принадлежности называем **линейными функциями принадлежности $L-R-$ типа**. Пример линейной функции принадлежности $L-R-$ типа представлен на рис. 1.4.

Линейные функции принадлежности $L-R-$ типа при $a' < a''$ называются **трапецеидальными**, при $a' = a'' = a$ - **треугольными**.

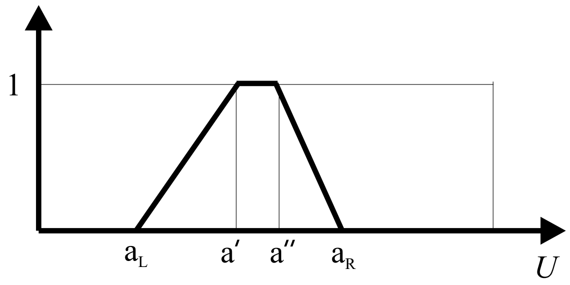

Рис. 1.4:

Как можно обобщить понятие нечеткого множества? Прежде всего, обобщение каснулось множества, описывающего степень принадлежности, т.е. множества $[0,1]$. Использование этого интервала для оценки степени принадлежности вполне естественно из-за наглядной интерпретации: 0 - полная непринадлежность элемента универсума нечеткому множеству, 1- его полная принадлежность. Однако, интерпретация является является делом вкуса и может кому-то нравиться, а кому-то - нет. Так, в экспертной системе MYCIN [33] в качестве интервала, описывающего неопределенность, используется $[-1,1]$. Это объясняется большой важностью значения с максимальной неопределенностью, которое при данном выборе множества принадлежностей равно 0. В качестве множества принадлежностей рассматривались также $[0,10], \{0,0.1,0.2,...,0.9,1\}$, множество неотрицательных действительных чисел, полные дистрибутивные решетки, упорядоченные полукольца и т.п. [29], [21]. От множества принадлежностей мы можем потребовать лишь одно: мы должны иметь возможность сравнивать принадлежность различных элементов универсума нечеткому множеству, т.е. на элементах множества принадлежности должно быть задано отношение порядка.

Таким образом, определение нечеткого множества (с. 9) можно обобщить следующим образом.

Пусть U - обычное множество, $\mathcal{M}$ - множество принадлежностей, $\mu_A : U \to \mathcal{M}$. **Нечетким множеством** A в U называется график отображения μ_A, то есть множество вида

$$\{(u, \mu_A(u)) : u \in U\},$$

Таким образом, нечеткое множество A задается тройкой

$$\langle U, \mathcal{M}, \mu_{\mathcal{A}} \rangle.$$

1.2 Множество нечетких подмножеств U и его свойства

Обозначим через $\mathcal{P}(U)$ множество всех нечетких подмножеств U. Опишем некоторые свойства $\mathcal{P}(U)$.

Прежде всего заметим, что мощность $\mathcal{P}(U)$ выше мощности множества подмножеств U. Действительно, если мощности множеств U и $\mathcal{M}$ конечны, то есть $|U| =$

$n, |\mathcal{M}| = m$, то $|\mathcal{P}(U)| = m^n$. При $m = 2$ (обычные множества) $|\mathcal{P}(U)| = 2^n$ - число подмножеств U.

Основные теоретико-множественные операции в $\mathcal{P}(U)$ вводятся следующим образом.

Говорят, что нечеткие множества A и B **равны** ($A = B$), если для всех u из U выполнено $\mu_A(u) = \mu_B(u)$.

Говорят, что нечеткое множество A **включает** нечеткое множество B ($A \supseteq B$), если для всех u из U выполнено $\mu_B(u) \leq \mu_A(u)$.

Говорят, что нечеткое множество B является **дополнением** нечеткого множества A в U ($B = \bar{A}$), если для всех u из U выполнено $\mu_B(u) = 1 - \mu_A(u)$.

Говорят, что нечеткое множество C является **пересечением** нечетких множеств A и B ($C = A \cap B$), если для всех u из U выполнено $\mu_C(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$.

Говорят, что нечеткое множество C является **объединением** нечетких множеств A и B ($C = A \cup B$), если для всех u из U выполнено $\mu_C(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$.

Говорят, что нечеткое множество C является **алгебраическим произведением** нечетких множеств A и B ($C = A * B$), если для всех u из U выполнено $\mu_C(u) = \mu_A(u) \cdot \mu_B(u)$.

Говорят, что нечеткое множество C является **алгебраической суммой** нечетких множеств A и B ($C = A \hat{+} B$), если для всех u из U выполнено $\mu_C(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u) \cdot \mu_B(u)$.

Нетрудно видеть, что замена в этих определениях функции принадлежности $\mu(u)$ на характеристическую функцию приводит к обычным операциям с теми же названиями в теории множеств.

Напомним, что алгеброй называется множество с определенными на его элементах операциями. Рассмотрим множество $\mathcal{P}(U)$ и определенные на его элементах и их парах операции дополнения, пересечения и объединения. Будем обозначать такую алгебру $\langle \mathcal{P}(U); \neg, \cap, \cup \rangle$. Для нее справедливы следующие свойства.

$$A \cap B = B \cap A, \tag{1.5}$$

$$A \cup B = B \cup A. \tag{1.6}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \tag{1.7}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \tag{1.8}$$

$$A \cap A = A, \tag{1.9}$$

$$A \cup A = A. \tag{1.10}$$

$$\overline{(\bar{A})} = A. \tag{1.11}$$

Свойства (1.5) - (1.11) очевидны и называются, соответственно, (1.5) и (1.6) - коммутативностью, (1.7) и (1.8) - ассоциативностью, (1.9) и (1.10) - идемпотентностью, (1.11) - инволюцией.

Утверждение 1 *Для нечетких множеств A,B и C выполнено*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{1.12}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{1.13}$$

Доказательство. Докажем равенство (1.12). В соответствии с определениями равенства, пересечения и объединения нечетких множеств (с. 13), необходимо доказать, что для любого u из U выполнено

$$\begin{aligned}&\min\{\mu_A(u), \max(\mu_B(u), \mu_C(u))\} = \\ &= \max\{\min(\mu_A(u), \mu_B(u)), \min(\mu_A(u), \mu_C(u))\}\end{aligned} \tag{1.14}$$

Зафиксируем некоторую точку $u \in U$.

Пусть $a = \mu_A(u)$, $b = \mu_B(u)$, $c = \mu_C(u)$. Возможны следующие варианты:

1) $a > b > c$; 2) $a > b = c$; 3) $a = b > c$; 4) $a = b = c$;
5) $a > c > b$; 6) $a > c = b$; 7) $a = c > b$; 8) $b > a > c$;
9) $b > a = c$; 10) $b > c > a$; 11) $b > c = a$; 12) $b = c > a$;
13) $c > a > b$; 14) $c > a = b$; 15) $c > b > a$.

Проверим выполнение формулы (1.14) в каждом из 15 случаев:

1) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = b$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{b, c\} = b$.

Таким образом, (1.14) в случае 1) справедливо.

2) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = b = c$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{b, c\} = b = c$.

Таким образом, (1.14) в случае 2) справедливо.

3) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = b = a$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{b, c\} = b = a$.

Таким образом, (1.14) в случае 3) справедливо.

4) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = a = b = c$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{a, a\} = a = b = c$.

Таким образом, (1.14) в случае 4) справедливо.

5) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = a$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{a, c\} = a$.

Таким образом, (1.14) в случае 5) справедливо.

6) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = a$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{a, a\} = a$.

Таким образом, (1.14) в случае 6) справедливо.

7) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, c\} = c$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{b, c\} = c$.

Таким образом, (1.14) в случае 7) справедливо.

8) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = b = c$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{b, c\} = b = c$.

Таким образом, (1.14) в случае 8) справедливо.

9) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, c\} = a = c$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{b, a\} = a = c$.

Таким образом, (1.14) в случае 9) справедливо.

10) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = a$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{a, a\} = a$.

Таким образом, (1.14) в случае 10) справедливо.

11) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = a = c$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{a, a\} = a = c$.

Таким образом, (1.14) в случае 11) справедливо.

12) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, b\} = a$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{a, a\} = a$.

Таким образом, (1.14) в случае 12) справедливо.

13) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, c\} = a$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{b, a\} = a$.

Таким образом, (1.14) в случае 13) справедливо.

14) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, c\} = a = b$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{a, a\} = a = b$.

Таким образом, (1.14) в случае 14) справедливо.

15) $\min\{a, \max(b, c)\} = \min\{a, c\} = a$;
$\max\{\min(a, b), \min(a, c)\} = \max\{a, a\} = a$.

Таким образом, (1.14) в случае 15) справедливо.

Второе равенство (1.13)доказывается аналогично.

Утверждение доказано.

Утверждение 2 *Для нечетких множеств A и B выполнено*

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \tag{1.15}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}. \tag{1.16}$$

Это утверждение называется теоремой де Моргана.

Доказательство. Докажем равенство (1.15). В соответствии с определениями равенства, пересечения, объединения и дополнения нечетких множеств (с. 13), необходимо доказать, что для любого u из U выполнено

$$1 - \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} = \max\{1 - \mu_A(u), 1 - \mu_B(u)\} \tag{1.17}$$

Зафиксируем некоторую точку $u \in U$.

Пусть $a = \mu_A(u)$, $b = \mu_B(u)$. Возможны следующие варианты:

1) $a > b$; 2) $a = b$; 3) $b > a$.

Проверим выполнение формулы (1.17) в каждом из 3 случаев:

1) $1 - \min\{a, b\} = 1 - b$; $\max\{1 - a, 1 - b)\} = 1 - b$. Таким образом, (1.17) в случае 1) выполнено.

1) $1 - \min\{a, b\} = 1 - a$; $\max\{1 - a, 1 - b)\} = 1 - a$. Таким образом, (1.17) в случае 2) выполнено.

1) $1 - \min\{a, b\} = 1 - a$; $\max\{1 - a, 1 - b)\} = 1 - a$. Таким образом, (1.17) в случае 3) выполнено.

Утверждение доказано.

Пустое множество, не содержащее ни одного элемента и обозначаемое $\emptyset$, играет очень большую роль в теории множеств и логике. В случае нечетких множеств функция принадлежности пустого множества имеет следующий вид:

$$\mu_\emptyset(u) = 0 \quad \forall u \in U. \tag{1.18}$$

Легко устанавливаются соотношения

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \tag{1.19}$$

$$A \cup \emptyset = A. \tag{1.20}$$

Операции с универсальным множеством, то есть множеством, содержащим все элементы U, также играют особую роль в теории множеств и логике. В случае нечетких множеств функция принадлежности универсального множества имеет следующий вид:

$$\mu_U(u) = 1 \quad \forall u \in U. \tag{1.21}$$

Легко устанавливаются соотношения

$$A \cap U = A, \tag{1.22}$$

$$A \cup U = U. \tag{1.23}$$

Напомним, что, если F - обычное множество, то $F \cap \bar{F} = \emptyset, F \cup \bar{F} = U$. Используя определения дополнения, пересечения и объединения для нечетких множеств (с. 13) не трудно показать, что для нечеткого множества A, для которого $\exists u \in U : 0 < \mu_A(u) < 1$ данные соотношения не выполняются. Таким образом, в общем случае для нечеткого множества A справедливо

$$A \cap \bar{A} \neq \emptyset, \tag{1.24}$$

$$A \cup \bar{A} \neq U, \tag{1.25}$$

что в сравнении с обычной логикой множеств кажется неожиданным.

Для алгеры $\langle \mathcal{P}(U); \neg, *, \hat{+} \rangle$ легко проверяются свойства коммутативности, ассоциативности, инволюции, теоремы де Моргана и соотношения с $\emptyset$ и U. Аналоги соотношений 1.24 и 1.25, как и в случае $\langle \mathcal{P}(U); \neg, \cap, \cup \rangle$, не выполняются.

Свойства коммутативности, инволюции и ассоциативности для алгебраического произведения является прямым следствием определений и соответствующих свойств операций умножения и сложения для чисел.

В некоторой дополнительной проверке могут нуждаться свойства ассоциативности для алгебраической суммы и теоремы де Моргана для указанных операций. Докажем первое из них.

Утверждение 3 *Для нечетких множеств A, B и C выполнено*

$$(A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C).$$

Доказательство. В соответствии с определениями равенства и алгебраической суммы нечетких множеств (с. 13), необходимо доказать, что для любого u из U выполнено

$$\begin{aligned}(\mu_A(u) &+ \mu_B(u) - \mu_A(u)\cdot\mu_B(u)) + \mu_C(u) - \\ &- (\mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u)\cdot\mu_B(u))\cdot\mu_C(u) = \\ = \mu_A(u) &+ (\mu_B(u) + \mu_C(u) - \mu_B(u)\cdot\mu_C(u)) - \\ &- (\mu_A(u)\cdot(\mu_B(u) + \mu_C(u) - \mu_B(u)\cdot\mu_C(u))\end{aligned} \tag{1.26}$$

Зафиксируем некоторую точку $u \in U$.

Пусть $a = \mu_A(u)$, $b = \mu_B(u), c = \mu_C(u)$.

Тогда правая часть (1.26) равна $(a + b - a\cdot b) + c - (a + b - a\cdot b)\cdot c = a + b + c - a\cdot b - a\cdot c - b\cdot c + a\cdot b\cdot c$.

Левая часть (1.26) равна $a+(b+c-b\cdot c)-a\cdot(b+c-b\cdot c) = a+b+c-b\cdot c-a\cdot b-a\cdot c+c\cdot b\cdot c$.

Сравнивая правые части последних двух равенств, получаем выполнение (1.26).

Утверждение доказано.

Доказательство теорем де Моргана для рассматриваемой алгебры читателю предлагается провести самостоятельно по схеме доказательства утверждения 3.

Новое в этой алгебре - невыполнение свойств идемпотентности и дистрибутивности. Первое является прямым следствием определения и свойств арифметических операций для чисел. Докажем невыполнение дистрибутивности алгебраической суммы относительно алгебраического произведения.

Утверждение 4 *Для нечетких множеств A, B и C выполнено*

$$A * (B\hat{+}C) \neq (A * B)\hat{+}(A * C) \tag{1.27}$$

Доказательство. Выберем u из U, и, полагая $a = \mu_A(u)$, $b = \mu_B(u)$, $c = \mu_C(u)$, получим для, соответственно, левой части (1.27) $a(b+c-bc) = ab+ac-abc$ и правой части (1.27) $ab + ac - (ab)(ac)$.

Таким образом, правая и левая части (1.27) равны, если только $a^2 = a$.

Утверждение доказано.

Недистрибутивность алгебраического произведения относительно алгебраической суммы доказывается аналогично.

Справедливы также следующие свойства

$$A * (B \cap C) = (A * B) \cap (A * C) \tag{1.28}$$

$$A * (B \cup C) = (A * B) \cup (A * C) \tag{1.29}$$

$$A\hat{+}(B \cap C) = (A\hat{+}B) \cap (A\hat{+}C) \tag{1.30}$$

$$A\hat{+}(B \cup C) = (A\hat{+}B) \cup (A\hat{+}C) \tag{1.31}$$

Доказательство свойств (1.28) - (1.31) читателю предлагается провести самостоятельно по схеме доказательства дистрибутивности (1.12)

Таким образом, для алгебры $\langle \mathcal{P}(U); \neg, \cap, \cup \rangle$ в отличие от алгебры обычных подмножеств не выполняются операции с дополнением, для алгебры $\langle \mathcal{P}(U);\ \neg, *, \hat{+} \rangle$, кроме того, не выполняются идемпотентность и дистрибутивность.

1.3 Подмножества α - уровня. Декомпозиция нечетких множеств

Здесь устанавливается связь между нечетким подмножеством универсального множества U и определенным образом устроенном семейством обычных его подмножеств. Эта связь вводится при помощи понятия подмножества α - уровня нечеткого множества.

Пусть $\alpha \in [0,1]$. Подмножеством α - уровня нечеткого множества A называется множество

$$A_\alpha = \{u \in U : \mu_A(u) \geq \alpha\}.$$

Утверждение 5 (О декомпозиции). *Любое нечеткое множество A можно представить в виде*

$$A = \max_\alpha \alpha \times A_\alpha.$$

Доказательство. Обозначим через B нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_B(u) = \max_\alpha \alpha \times A_\alpha(u)$. Зафиксируем некоторую точку $u \in U$. Пусть $\mu_A(u) = a$. Тогда при $\alpha \leq a$ и $\beta > a$, соответственно, имеем $\mu_{A_\alpha}(u) = 1$ и $\mu_{A_\beta}(u) = 0$. Таким образом, $\max_\alpha \alpha \times A_\alpha(u) = \mu_B(u) = a$.

Итак, при $u \in U$ имеем $\mu_A(u) = \mu_B(u)$, что означает равенство множеств A и B.

Утверждение доказано.

Если мы имеем последовательность множеств

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n$$

и последовательность чисел

$$1 \leq \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n > 0,$$

то с помощью утверждения о декомпозиции мы можем синтезировать нечеткое множество A.

Функция принадлежности данного множества будет иметь следующий вид:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если} \quad h_{A_i}(u) = 1 \text{ и } h_{A_{i-1}}(u) = 0 \\ 0, & \text{если} \quad h_{A_n}(u) = 0, \end{cases}$$

где $h_A(u)$ - характеристическая функция множества A.

Это очень важное свойство, поскольку оно позволяет наряду с определением нечеткого множества как отображения $\mu_A(u) : U \to [0,1]$ (с. 9) ввести понятие нечеткого множества как отображения $\mu_A(u) : 2^U \to [0,1]$. В некоторых случаях последнее определение оказывается более удобным,

1.4 Расстояние между нечеткими множествами

Напомним определение расстояния.

Пусть V - некоторое множество, D_+- множество неотрицательных действительных чисел и $d : V \times V \to D_+$. Говорят, что $d(x, y)$ - расстояние в V, если при $x, y, z \in V$ выполнено
1)$d(x, x) = 0$
2)$d(x, y) = d(y, x)$
3)$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}(U)$. В нем можно ввести метрику, или расстояние между функциями принадлежности (нечеткими множествами).

Приведем примеры расстояний.

Пример 2 *Можно привести следующие известные расстояния между нечеткими множествами:*

- расстояние Хемминга для конечного универсального множества $U : |U| = n$:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|;$$

- относительное расстояние Хемминга для конечного универсального множества $U : |U| = n$:

$$\sigma(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|;$$

- расстояние Хемминга для бесконечного универсального множества $U \subseteq R^1$:

$$d(A, B) = \int\limits_U |\mu_A(u) - \mu_B(u)| du;$$

- относительное расстояние Хемминга для бесконечного универсального множества $U \subseteq R^1$:

$$\sigma(A, B) = \frac{1}{|U|} \int\limits_U |\mu_A(u) - \mu_B(u)| du;$$

- расстояние Евклида для конечного универсального множества $U : |U| = n$:

$$e(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i))^2};$$

- относительное расстояние Евклида для конечного универсального множества $U : |U| = n$:

$$\varepsilon(A, B) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i))^2};$$

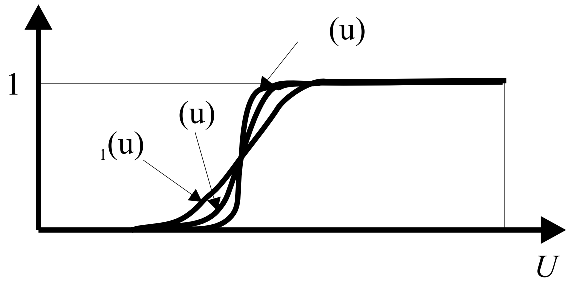

Рис. 1.5:

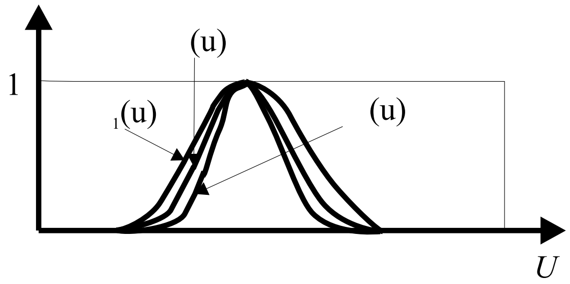

Рис. 1.6:

- *расстояние Евклида для бесконечного универсального множества $U \subseteq R^1$:*

$$e(A,B) = \sqrt{\int\limits_U (\mu_A(u) - \mu_B(u))^2 du};$$

- *относительное расстояние Евклида для бесконечного универсального множества $U \subseteq R^1$:*

$$\varepsilon(A,B) = \frac{1}{\sqrt{|U|}} \sqrt{\int\limits_U (\mu_A(u) - \mu_B(u))^2 du}.$$

Очевидно, что можно придумать и определить и другие расстояния. Выбор того или иного расстояния зависит от природы рассматриваемой проблемы. Каждое из них обладает своими преимуществами и недостатками, которые становятся очевидными в приложениях. Понятие расстояния будет нами активно использовано ниже при определении степени нечеткости множества (раздел 1.5).

1.5 Измерение степени нечеткости множества

Нечеткие множества могут иметь разную степень нечеткости. Множества $s-$ и $\pi-$ типов, имеющих различную степень нечеткости, приведены на рис. 1.5 и рис. 1.6 соответственно (множество $\mu_1(u)$ является наиболее "нечетким", множество $\mu_3(u)$ - наиболее "четким").

Меры нечеткости важны в приложениях теории нечетких множеств. Этот показатель является параметром оценки качества различных процедур и алгоритмов в распознавании образов, принятии решений, моделях поиска информации [40] - [43] и т.п.

Работы по измерению степени нечеткости начались с 1972 г. [68] Исторически первыми были разработаны методы оценки нечеткости через энтропию [21]; к настоящему времени можно выделить два основных подхода к оценке степени нечеткости множества: метрический и аксиоматический.

1.5.1 Оцека нечеткости через энтропию

Этот подход к оценке степени нечеткости множества базируется на использовании понятии энропии в физике. Степень неопределенности компонент физической системы относительно вероятности ее состояния составляет содержание понятия энтропии. Поэтому желание использовать его для вычисления степени нечеткости (неопределенности) множества являлось естественным в силу очевидной аналогии. Напомним определение энтропии.

Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ - состояния системы, $p_1, p_2, \cdots, p_n$ - вероятности состояний. Энтропия системы $H(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ определяется следующим выражением:

$$H(p_1, p_2, \cdots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \tag{1.32}$$

Непосредственно из данного определения вытекают следующие свойства энтропии:

a) $H = 0$ (минимально), если

$$\exists j \quad (1 \leq j \leq n) \quad (p_j = 1);$$

b) $H = \ln n$ (максимально), если

$$\forall j \quad (1 \leq j \leq n) \quad \left(p_j = \frac{1}{n}\right).$$

Если в формуле (1.32) перед знаком суммы поставить нормировочный коэффициент $\frac{1}{\ln n}$, то значение энтропии будет меняться в пределах от 0 до 1.

Оценка степени нечеткости через энтропию заключается в следующем:

1) Проводится "нормировка" нечеткого множества A. Эта процедура выглядит следующим образом:

1.1) Вычисляется величина $C(A) = \int_U \mu_A(u)du$ в случае $U \subset R^1$ или $C(A) = \sum_{u_i \in U} \mu_A(u_i)$ для конечного универсального множества. Эта величина в разных работах называется "мощностью нечеткого множества", "массой нечеткого множества" и т.п.;

1.2) Строится нечеткое множество $\hat{A}$ следующим образом:

$$\mu_{\hat{A}}(u) = \frac{\mu_A(u)}{C(A)}.$$

Множество $\hat{A}$ и есть "пронормированное" множество A.

2) В качестве степени нечеткости A берется значение пронормированной формулы (1.32) для пронормированного множества $\hat{A}$:

$$\xi(A) = -\frac{1}{\ln n} \sum_{u_i \in U} \mu_{\hat{A}}(u_i) \ln \mu_{\hat{A}}(u_i) \tag{1.33}$$

Даже беглый анализ формулы (1.33) позволяет заметить, что значение степени нечеткости зависит не от собственно значений функции принадлежности, а от их отноительных значений. Это приводит к следующим "парадоксам":

1) Степень нечеткости обычных множеств $\mu_{\emptyset}(u)$ (1.18) и $\mu_U(u)$ (1.21) максимальна;

2) Минимальна только степень нечеткости множеств с единственным ненулевым элементом - как "четких", так и "нечетких".

Из сказанного вытекает, что энтропийная мера нечеткости обладает недостатками. Тем самым важны другие подходы к оценке степени нечеткости.

1.5.2 Метрический подход

Основная идея этого подхода к измерению степени нечеткости множеств базируется на использовании понятия расстояния между нечеткими множествами (раздел 1.4).

Идея метрического подхода заключается в оценке степени нечеткости как расстояния между оцениваемым множеством и некоторым множеством с известной степенью нечеткости.

Для строгого определения этой идеи нам понадобятся ряд понятий.

Пусть A - нечеткое множество. Обычное множество $\check{A}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\check{A}}(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(u) < 0,5 \\ 1, & \text{если } \mu_A(u) > 0,5 \\ 0 \quad \text{или} \quad 1, & \text{если } \mu_A(u) = 0,5 \end{cases}$$

называется ближайшим к нечеткому множеству A.

Будем называть множество A^* с известной степенью нечеткости базисным множеством.

Пример 3 *В качестве примеров базисных множеств можно привести:*

1) $A^* = \check{A}$; Это множество определяется множеством A и имеет степень нечеткости, равную нулю. Чем больше расстояние от некоторого множества до его ближайшего четкого множества, тем больше степень его нечеткости.

2) $A^* = A_{0,5}$, где $\mu_{A_{0,5}}(u) = 0.5 \quad \forall u \in U$. Это максимально нечеткое множество. Чем ближе к нему некоторое нечеткое множество, тем больше степень его нечеткости.

Теперь мы можем дать определение степени нечеткости множества.

Пусть f - некоторая монотонная функция, $\rho(x,y)$ - метрика в $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, A^* - базисное множество, тогда степенью нечеткости $\xi(A)$ нечеткого множества A называется значение $\xi(A) = f[\rho(A, A^*)]$.

Функция f подбирается для удовлетворения некоторым естественным требованиям для степени нечеткости, которые определяются для каждой задачи.

Примерами таких требований могут быть изменение степени нечеткости в пределах от 0 до 1, равенство степени нечеткости нулю для обычного множества и т.п. Подробнее о таких требованиях можно узнать в разделе 1.5.3.

Ниже приводятся примеры конкретных функционалов, измеряющих степень нечеткости.

Пример 4 *В качестве примеров степени нечеткости можно привести:*

1) $\xi_1(A) = 2\varepsilon(A, \check{A}); \quad 0 \leq \xi_1(A) \leq 1$*;*

2) $\xi_2(A) = 1 - 2d(A, A_{0,5}); \quad 0 \leq \xi_2(A) \leq 1$.

1.5.3 Аксиоматический подход

Основная идея аксиоматического подхода заключается в формулировании некоторых "естественных" требований (аксиом) к степени нечеткости, и поиске конкретных функционалов, удовлетворяющих этим требованиям.

Обычно пользуются следующими аксиомами степени нечеткости множества.

$P1$. $\xi(A) = 0$ (минимально) для ситуации, когда A - обычное множество;

$P2$. $\xi(A_{0,5}) = 1$ (максимально);

$P3$. $\xi(A) \leq \xi(B)$, если $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) < 0.5$ и $\mu_A(u) \geq \mu_B(u)$ при $\mu_B(u) > 0.5$ (в этом случае говорят, что A является заострением B);

$P4$. $\xi(A) = \xi(\bar{A})$ (симметриченость по отношению к $0,5$).

Иногда дабавляется аксиома $P5$.

$P5$. $\xi(A \cup B) + \xi(A \cap B) = \xi(A) + \xi(B)$, т.е. ξ является оценкой на решетке $P(U)$.

Нетрудно проверить, что приведенные в примере 4 функционалы удовлетворяют данным аксиомам. И обратно, с помощью подбора функции f в рамках метрического подхода (определение 1.5.2) можно добиться удовлетворения $P1, P2$; монотонность f и использование в качестве аргумента расстояния до обычного или максимально нечеткого множества гарантирует выполнение $P3, P4$.

1.5.4 Некоторые свойства степени нечеткости множества

Приведем некоторые свойства степени нечеткости, иллюстрирующие ее "естественность", то есть удовлетворение интуитивным представлениям о ней.

В качестве примера рассмотрим степень нечеткости $\xi(A) = 2\varepsilon(A, \check{A})$.

Рассмотрим множество нечетких множеств, имеющих одну и ту же степень нечеткости

$$\Psi(A) = \{B : \xi(B) = \xi(A)\}. \tag{1.34}$$

Равенство $\xi(B) = \xi(A)$ является условием отношения эквивалентности на $P(U)$, $\Psi(A)$ - соответствующий класс эквивалентности.

Ниже формулируется ряд утверждений, часть из которых достаточно очевидна, часть доказана в работах [41], [43].

Утверждение 6 *Соотношения* $B \in \Psi(A)$ *и* $\bar{B} \in \Psi(A)$ *эквивалентны.*

Пусть g - некоторая взаимно-однозначная функция, определенная на U. Нечеткие множество A_g, определяемое функцией принадлежности $\mu_{A_g}(u) = \mu_A(g^{-1}(u))$ будем называть перестановкой множества A.

Утверждение 7 *Если B_g - перестановка множества B, соотношения $B \in \Psi(A)$ и $B_g \in \Psi(A)$ эквивалентны.*

Часным случаем перестановки является сдвиг функции принадлежности влево или вправо [41]. Поэтому справедливо

Следствие 1 *Если B_λ - сдвиг множества B на λ единиц, соотношения $B \in \Psi(A)$ и $B_\lambda \in \Psi(A)$ эквивалентны.*

Утверждение 8 *Если для всех u из U выполнено*
$\mu_{A_1}(u) < \mu_{A_2}(u)$, то
1) $\xi(A_1) \leq \xi(A_2)$ при $\mu_{A_2} < 0,5$;
2) $\xi(A_1) \geq \xi(A_2)$ при $\mu_{A_1} > 0,5$.

Следствие 2 *Если при $i = 1,2$ выполнено $B_i \in \Psi(A)$ и*
$B_3 = B_1 \cap B_2$, то
1) $\xi(B_3) \leq \xi(A)$ при $\mu_{B_i}(u) < 0.5 \quad \forall u \in U$;
2) $\xi(B_3) \geq \xi(A)$ при $\mu_{B_i}(u) > 0.5 \quad \forall u \in U$.

Следствие 3 *Если при $i = 1,2$ выполнено $B_i \in \Psi(A)$ и*
$B_3 = B_1 \cup B_2$, то
1) $\xi(B_3) \geq \xi(A)$ при $\mu_{B_i}(u) < 0.5 \quad \forall u \in U$;
2) $\xi(B_3) \leq \xi(A)$ при $\mu_{B_i}(u) > 0.5 \quad \forall u \in U$.

Последние два следствия свидетельствуют о том, что операция дополнения не выводит нас из класса функций одинаковой степени нечеткости; операции же пересечения и объединения, вообще говоря, не сохраняют класса функций одинаковой степени нечеткости. При последних двух операциях нечеткость может как увеличиваться, так и уменьшаться, однако кокой-либо систематический эффекит увеличения (уменьшения) нечеткости возможен при довольно сильных ограничениях, редко встречающихся на практике.

В заключении рассмотрим значение степени нечеткости для некоторых специальных типов функций принадлежности.

Справедливы следующие предложения.

Утверждение 9 *Если $\mu_A(u) = s(u; \alpha, \beta, \gamma)$, то $\xi(A) = \frac{1}{3}(\gamma - \alpha)$.*

Утверждение 10 *Если $\mu_A(u) = \pi(u; \beta, \gamma)$, то $\xi(A) = \frac{2}{3}\beta$.*

Содержательный смысл утверждений 9 и 10 состоит в том, что чем "круче" возрастает $s-$ функция и чем "уже" $\pi-$ функция, тем меньше их степень нечеткости.

Пусть функции принадлежности являются кусочно-линейными (Рис. 1.4). Обозначая через u_L и u_R левую и правую границу области неопределенности, мы можем задать функцию принаждежности в аналитическом виде, а именно:

$$\mu_{A_1}(u) = \begin{cases} 1 & , \quad u \le u_L \\ \frac{u_R - u}{u_R - u_L} & , \quad u_L \le u \le u_R \\ 0 & , \quad u \ge u_R \end{cases} \tag{1.35}$$

$$\mu_{A_2}(u) = \begin{cases} 0 & , \quad u \le u_L \\ \frac{u - u_L}{u_R - u_L} & , \quad u_L \le u \le u_R \\ 1 & , \quad u \ge u_R \end{cases} \tag{1.36}$$

Обозначим множество таких нечетких множеств через L. Справедливо следующее предложение.

Утверждение 11 *Если* $A \in L$, *то* $\xi(A) = \frac{d}{2|U|}$, *где* $d = u_R - u_L$.

Таким образом, чем меньше область неопределенности, тем меньше степень нечеткости множества, что согласуется с интуитивным представлениям о нечеткости. степени нечеткости множества, изложенными в 1.5.4.

Глава 2

Нечеткие отношения

Понятие отношения играет важную роль в математике и ее приложениях. Это понятие активно используется в теории автоматов [22]; распознавании образов [15]; при моделировании структуры сложных систем [23], [25], [27]; при анализе процессов принятия решений [23], [6] [28], [30] и многих других областях. Понятие отношения также можно обобщить на нечеткий случай. При этом обнаруживаются некоторые новые интересные свойства. Так, например, понятие класса эквивалентности заменяется понятием подобия. Подобие является не таким жестким, и, поэтому, более подходящим для представления менее определенных и довольно часто встречающихся ситуаций. В рамках нечетких отношений можно ввести некоторые новые типы отношений, например, сходства и несходства, более адекватно описывающих многие практические ситуации.

Нечеткие отношения вводятся как нечеткие подмножества специальным образом устроенного универсального множества. Многие понятия и свойства нечетких отношений в данной главе описаны схематично, поскольку подробный анализ их аналогов проведен в главе 1.

2.1 Основные операции и их свойства

Напомним определение прямого произведения двух множеств.

Пусть $U_1 = \{x\}$ и $U_2 = \{y\}$ - обычные множества. Прямое произведение $U_1 \times U_2$ множеств U_1 и U_2 есть множество упорядоченных пар вида (x, y), то есть

$$U_1 \times U_2 = \{(x, y) : \quad x \in U_1,\ y \in U_2\}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ - множество принадлежностей. Тогда нечеткое множество $\mathcal{R}$ такое, что

$$\forall (x, y) \in U_1 \times U_2 \quad \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \in \mathcal{M}$$

называется нечетким бинарным отношением $\mathcal{R}$ в $U_1 \times U_2$.

Можно привести следующий пример нечеткого бинарного отношения.

Пример 5 *Пусть* $U_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $U_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $\mathcal{M} = [0, 1]$. *Тогда нечеткое бинарное отношение может быть задано следующей таблицей:*

$\mathcal{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0.3	0.5	0.9	0.3
x_2	0.7	0.2	1	0	0.1
x_3	0.9	0	1	0.7	0.4

Естественным обобщением нечеткого бинарного отношения является нечеткое $n-$ арное отношение. Оно определяется следующим образом. Пусть $P_n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ - прямое произведение n множеств, $\mathcal{M}$ - множество принадлежностей. Нечетким n - арным отношением называется нечеткое множество в P_n, принимающее свои значения в $\mathcal{M}$.

Ниже мы будем рассматривать только нечеткие бинарные отношения. Вводимые понятия естественным образом обобщаются на случай $n-$ арных отношений.

Для нечетких отношений вводятся понятия проекций следующим образом. Первая проекция нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}}^{(1)}(x) = \max_y \mu_{\mathcal{R}}(x,y).$$

Вторая проекция нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}}^{(2)}(y) = \max_x \mu_{\mathcal{R}}(x,y).$$

Глобальной проекцией $h(\mathcal{R})$ нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ называется вторая проекция первой проекции (или наоборот):

$$h(\mathcal{R}) = \max_x \max_y \mu_{\mathcal{R}}(x,y) = \max_y \max_x \mu_{\mathcal{R}}(x,y).$$

Понятия носителя, включения отношений и основные операции для них определяются аналогично соответствующим понятиям для множеств (раздел 1.2).

Носителем $S(\mathcal{R})$ нечеткого отношения $\mathcal{R}$ называется обычное множество упорядоченных пар (x,y), для которых функция принадлежности положительна, то есть

$$S(\mathcal{R}) = \{(x,y): \quad \mu_{\mathcal{R}}(x,y) > 0\}.$$

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{L}$ содержит нечеткое отношение $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ содержится в $\mathcal{L}$), если для всех пар (x,y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{R}}(x,y) \le \mu_{\mathcal{L}}(x,y)$.

Говорят, что нечеткое отношение $\overline{\mathcal{R}}$ является дополнением нечеткого отношения $\mathcal{R}$, если для всех пар (x,y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x,y)$.

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{G}$ является объединением нечетких отношений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G} = \mathcal{R} \cup \mathcal{L}$), если для всех пар (x,y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{G}}(x,y) = \max\left[\mu_{\mathcal{R}}(x,y),\ \mu_{\mathcal{L}}(x,y)\right]$.

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{G}$ является пересечением нечетких отношений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$), если для всех пар (x,y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{G}}(x,y) = \min\left[\mu_{\mathcal{R}}(x,y),\ \mu_{\mathcal{L}}(x,y)\right]$.

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{G}$ является алгебраическим произведением нечетких отношений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G} = \mathcal{R} \bullet \mathcal{L}$), если для всех пар (x,y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{G}}(x,y) = \mu_{\mathcal{R}}(x,y) \cdot \mu_{\mathcal{L}}(x,y)$.

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{G}$ является алгебраической суммой нечетких отношений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G} = \mathcal{R}\hat{+}\mathcal{L}$), если для всех пар (x, y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{G}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(x, y) + \mu_{\mathcal{L}}(x, y) - \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \cdot \mu_{\mathcal{L}}(x, y)$.

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{G}$ является дизъюнктивной суммой нечетких отношений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G} = \mathcal{R} \bigoplus \mathcal{L}$), если для всех пар (x, y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mathcal{G} = (\mathcal{R} \cap \overline{\mathcal{L}}) \cup (\overline{\mathcal{R}} \cup \mathcal{L})$.

Не трудно видеть, что, если мы заменим в определениях введенных операций функции принадлежности $\mu(x, y)$ на характеристические функции $h(x, y)$, то получим определения соответствующих операций, принятые в теории отношений. В этом смысле теория нечетких отношений является обобщением теории (обычных) отношений.

Так как нечеткие отношения есть нечеткие множества на специфическом универсальном множестве, основные операции над ними обладают теми же свойствами. Доказательства свойств аналогичны доказательствам, приведенным в 1.2.

Как и в случае нечетких множеств, нечеткое отношение можно декомпозировать на специальным образом устроенную систему обычных отношений и наоборот, из системы обычных отношений, удовлетворяющим некоторым требованиям, можно синтезировать нечеткое отношение. Такая декомпозиция и синтез нечетких отношений производится с помощью подмножеств α - уровня нечеткого отношения.

Пусть $\alpha \in [0, 1]$, $\mathcal{R} \in U \times U$. **Подмножеством α - уровня** нечеткого отношения $\mathcal{R}$ называется обычное подмножество $\mathcal{R}_\alpha = \{(x, y) : \ \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha\}$

Функция принадлежности подмножества α - уровня задается выражением

$$\mu_{\mathcal{R}_\alpha}(x, y) = \begin{cases} 1, & \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha \\ 0, & \mu_{\mathcal{R}}(x, y) < \alpha \end{cases}$$

Достаточно очевидно, что, если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то $\mathcal{R}_{\alpha_1} \subset \mathcal{R}_{\alpha_2}$.

Утверждение 12 (о декомпозиции). *Любое отношение $\mathcal{R}$ можно представить в форме*

$$\mathcal{R} = \max_\alpha \alpha \times \mathcal{R}_\alpha$$

Доказательство. Справедливы следующие соотношения:

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \max_{\alpha \leq \mu_{\mathcal{R}}(x,y)} \alpha = \max_\alpha \alpha \times \mu_{\mathcal{R}_\alpha}(x, y) = \mu_{\max_\alpha \alpha \times \mathcal{R}_\alpha}(x, y).$$

Утверждение доказано.

Пример 6

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0.2 & 0.5 & 0 & 1 \\ \hline 0.4 & 0.3 & 0.9 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0.7 & 0.5 \\ \hline \end{array} = \max\left[0.2 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array},\right.$$

$$0.3 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, 0.4 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array},$$

$$0.5 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, 0.7 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array},$$

$$\left. 0.9 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, 1 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right]$$

2.2 Композиция нечетких отношений

Операция композиции нечетких отношений $\mathcal{R}_1$ в $X \times Y$ и $\mathcal{R}_2$ в $Y \times Z$ позволяет определить нечеткое отношение в $X \times Z$.

(Max-min) - композиция и ее свойства

Пусть $\mathcal{R}_1$ есть нечеткое отношение в $X \times Y$, $\mathcal{R}_2$ - нечеткое отношение в $Y \times Z$. (Max-min) - композиция $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ определяется выражением

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2}(x, z) = \max_y \left[\min\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(y, z)\}\right], \tag{2.1}$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

Вычисление композиции нечетких отношений аналогично вычислению произведения матриц, ("столбец на строку"), только вместо произведения и суммы выполняются операции взятия минимума и максимума соответственно.

Пример 7 *Пусть* $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. *Отношение* $\mathcal{R}_1$ *на* $X \times Y$ *задано следующей матрицей:*

$\mathcal{R}_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.1	0.2	0.5	0.7	0.3
x_2	0.3	0	1	0.3	0.7
x_3	0.1	0.8	0	0	1

Нечеткое отношение $\mathcal{R}_2$ *на* $Y \times Z$ *задано следующей матрицей:*

$\mathcal{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0.9	0	0.4	0.7
y_2	0.3	0.4	0.9	1
y_3	1	0.4	0.2	0
y_4	0.3	0.4	0.7	0.2
y_3	0.5	0.5	0.9	0.1

Тогда нечеткое отнишение $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ определено на $X \times Z$ и имеет выражается следующей матрицей:

$\mathcal{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	*0.5*	*0.4*	*0.7*	*0.2*
x_2	*1*	*0.5*	*0.7*	*0.8*
x_3	*0.5*	*0.5*	*0.9*	*0.8*

Среди свойств (max-min) - композиции можно выделить следующие.
– ассоциативность: $(\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)$;
– дистрибутивность относительно объединения:

$$\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \cup (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3);$$

– не дистрибутивность относительно пересечения:

$$\mathcal{R}_3 \circ (\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_1) \neq (\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2) \cap (\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_1);$$

– монотонность:

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{A} \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{B}.$$

Доказательства данных свойств достаточно очевидны. Читателю предлагается их провести самостоятельно по схемам, которые были нами применены в 1.2.

(Max-$\star$) - композиции

Понятие (Max-min) - композиции можно обобщить следующим образом: заменить в (2.1) операцию min на любую другую, для которой выполняются свойство ассоциативности и монотонного неубывания по каждому аргументу:

Пусть операция $''\star''$ является ассоциативной и монотонно не убывает по каждому аргументу. (Max-$\star$) - композиция определяется следующей функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2}(x,z) = \max_y \left[\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y) \star \mu_{\mathcal{R}_2}(y,z)\right], \tag{2.2}$$

где $x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$.

Важным частным случаем (Max-$\star$) - композиции является (Max-$\cdot$) - композиция. В этом случае операция "$\star$" - это произведение, и, таким образом, (2.2) принимает следующий вид:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2}(x,z) = \max_y \left[\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\mathcal{R}_2}(y,z)\right],$$

где $x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$.

Другим примером (Max-$\star$) - композиции в случае, когда множество принадлежностей $\mathcal{M} = [0,1]$, является композиция, получаемая из (2.1) заменой операции min на среднее арифметическое:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2}(x,z) = \max_y \left[\frac{1}{2}\left(\mu_{\mathcal{R}_1}(x,y) + \mu_{\mathcal{R}_2}(y,z)\right)\right],$$

где $x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$.

Другие конкретные (Max-$\star$) - композиции и их свойства рассматриваются в работах [21], [29].

Выбор того или иного варианта (max-$\star$) - композиции в приложениях определяется свойствами задачи.

2.3 Нечеткие бинарные отношения в $U \times U$

Рассмотрим случай $U_1 = U_2 = U$, $\mathcal{M} = [0,1]$. Для нечетких отношений довольно естественно вводятся свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Нечеткое бинарное отношение $\mathcal{R}$ называется рефлексивным, если $\mu_{\mathcal{R}}(x,x) = 1 \quad \forall x \in U$.

Нечеткое бинарное отношение $\mathcal{R}$ называется симметричным, если $\mu_{\mathcal{R}}(x,y) = \alpha \Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(y,x) = \alpha \quad \forall x, y \in U$.

Нечеткое бинарное отношение $\mathcal{R}$ называется транзитивным, если $\mu_{\mathcal{R}}(x,z) \geq \max_y \left[\mu_{\mathcal{R}}(x,y), \mu_{\mathcal{R}}(y,z)\right] \quad \forall x, y, z \in U$.

Пример 8 *Отношение "x близко к y" рефлексивно, симметрично, но не транзитивно; отношения "y много больше x", "y чище x" - не рефлексивны, не симметричны, но транзитивны.*

2.3.1 Транзитивное замыкание нечеткого бинарного отношения

Пусть $\mathcal{R}$ - нечеткое отношение в $U \times U$. Определим $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}^2}(x,z) = \max_y[\min(\mu_{\mathcal{R}}(x,y), \mu_{\mathcal{R}}(y,z))],$$

где $x, y, z \in U$.

Сравнивая последнее выражение с определением транзитивности для нечетких бинарных отношений, не трудно увидеть, что свойство транзитивности можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$$

Аналогично можно определить по индукции $\mathcal{R}^k$:

$$\mathcal{R}^k = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{k-1},\ k = 2, 3, \ldots.$$

Пусть $\mathcal{R}^2 \subset \mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^{k+1} \subset \mathcal{R}^k,\ k = 2, 3, \ldots$. Тогда, очевидно, $\mathcal{R}^k \subset \mathcal{R}$.

Транзитивным замыканием нечеткого бинарного отношения будем называть отношение

$$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \ldots. \tag{2.3}$$

Справедливо следующее

Утверждение 13 *Транзитивное замыкание любого бинарного отношения есть транзитивное бинарное отношение*

Доказательство. Согласно (2.3) можно записать:

$$\hat{\mathcal{R}}^2 = \hat{\mathcal{R}} \circ \hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \mathcal{R}^4 \cup \ldots .$$

Сравнивая последнее выражение с (2.3), можно записать: $\hat{\mathcal{R}}^2 \subset \hat{\mathcal{R}}$, что и доказывает транзитивность $\mathcal{R}$.

Утверждение доказано.

Как проверить, построили мы или нет транзитивное замыкание конкретного нечеткого бинарного отношения? Ответ на этот вопрос дает следующее

Утверждение 14 *Пусть $\mathcal{R}$ - некоторое нечеткое бинарное отношение. Если существует k такое, что $\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k$, то $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \ldots \cup \mathcal{R}^k$.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из соотношений:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} &= \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \ldots \cup \mathcal{R}^k \cup \mathcal{R}^{k+1} \cup \mathcal{R}^{k+2} \cup \ldots = \\ &= \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \ldots \cup \mathcal{R}^k \cup \mathcal{R}^k \cup \mathcal{R}^k \cup \ldots = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \ldots \cup \mathcal{R}^k. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Всегда ли композиция $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ или $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ двух транзитивных отношений $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ есть транзитивное отношение? Можно привести пример, что это свойство не всегда выполняется.

Пример 9 *Пусть $\mathcal{R}_1$ задается таблицей (2.4). Это отношение транзитивно, т.к. $\mathcal{R}_1^2 \subset \mathcal{R}_1$.*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ \hline 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0{,}5 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ \hline 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ \hline 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ \hline \end{array} \tag{2.4}$$

Пусть $\mathcal{R}_2$ - отношение, заданное (2.5). Это отношение транзитивно, т.к. $\mathcal{R}_2^2 \subset \mathcal{R}_2$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ \hline 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ \hline 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$
= \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline \end{array} \tag{2.5}
$$

Теперь подсчитаем $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ *(2.6):*

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,5 & 0,9 & 0 & 0 & 0,5 \\ \hline 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0,4 & 1 & 0 \\ \hline 0,7 & 0,9 & 0 & 0 & 0,5 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline \end{array} =
$$

$$
= \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline 0,7 & 0,7 & 0,6 & 0,6 & 0,7 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,8 & 0,6 & 1 \\ \hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline \end{array} \tag{2.6}
$$

и $(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)^2$ *(2.7):*

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline 0,7 & 0,7 & 0,6 & 0,6 & 0,7 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline 0,7 & 0,7 & 0,6 & 0,6 & 0,7 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline \end{array} =
$$

$$
= \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline 0,7 & 0,7 & 0,6 & 0,6 & 0,7 \\ \hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,8 \\ \hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline 0,8 & 0,9 & 0,6 & 0,6 & 0,9 \\ \hline \end{array} \tag{2.7}
$$

Сравнивая (2.6) и (2.7), получаем, что $(\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)^2 \subset \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$*. Это доказывает транзитивность* $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$

Теперь подсчитаем $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ *(2.8):*

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ \hline 0,8 & 1 & 0,6 & 0,6 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0,5 & 0,9 & 0 & 0 & 0,5 \\ \hline 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0,4 & 1 & 0 \\ \hline 0,7 & 0,9 & 0 & 0 & 0,5 \\ \hline \end{array} =
$$

	0,5	0,7	0	0	0,5
	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
=	0	0,5	0,4	0,5	0
	0	0,4	0,4	0,4	0
	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

(2.8)

и $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)^2$ *(2.9):*

0,5	0,7	0	0	0,5		0,5	0,7	0	0	0,5	
0,7	0,9	0,4	0,6	0,5		0,7	0,9	0,4	0,6	0.5	
0	0,5	0,4	0,5	0	∘	0	0,5	0,4	0,5	0	=
0	0,4	0,4	0,4	0		0	0,4	0,4	0,4	0	
0,7	0,9	0,4	0,6	0,5		0,7	0,9	0,4	0,6	0,5	

	0,7	0,7	0,4	0,6	0,5
	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5
=	0,5	0,5	0,4	0,5	0,5
	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
	0,7	0,9	0,4	0,6	0,5

(2.9)

Сравнивая (2.8) и (2.9), получаем, что $(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2)^2 \not\subset \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$*, и, следовательно, отношение* $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ *не является транзитивным. Таким образом, композиция двух транзитивных отношений не всегда дает транзитивное отношение.*

2.3.2 Некоторые специальные типы нечетких отношений

Нечеткие отношения порядка

Транзитивное и рефлексивное нечеткое бинарное отношение называется нечетким отношением предпорядка.

Для нечетких отношений предпорядка справедлива следующая

Теорема 1 *Если* $\mathcal{R}$ *- предпорядок, то* $\mathcal{R}^k = \mathcal{R}, \qquad \forall k\ (k = 1, 2, 3, \ldots).$

Доказательство. Согласно определению (max-min) - композиции

$$\mu_{\mathcal{R}^2}(x,z) = \max_y[\min(\mu_{\mathcal{R}}(x,y),\ \mu_{\mathcal{R}}(y,z))]. \tag{2.10}$$

При $y = x$ и $y = z$ правая часть (2.10) содержит два равных члена $\min(\mu_{\mathcal{R}}(x,x),\ \mu_{\mathcal{R}}(x,z))$ и $\min(\mu_{\mathcal{R}}(x,z),\ \mu_{\mathcal{R}}(z,z))$, которые равны $\mu_{\mathcal{R}}(x,z)$, поскольку в силу рефлексивности $\mathcal{R}$

$$\mu_{\mathcal{R}}(x,x) = \mu_{\mathcal{R}}(z,z) = 1.$$

Таким образом,

$$\mu_{\mathcal{R}^2}(x,z) \le \mu_{\mathcal{R}}(x,z). \tag{2.11}$$

С другой стороны, по определению рефлексивности

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, z) \geq \max_{y}[\min(\mu_{\mathcal{R}}(x, y),\ \mu_{\mathcal{R}}(y, z))]. \tag{2.12}$$

Сравнивая (2.10),(2.11) и (2.12) и обозначая через $\tau(x, y)$ выражение $\max_y[\min(\mu_{\mathcal{R}}(x, y),\ \mu_{\mathcal{R}}(y, z))]$, мы можем написать:

$$\tau(x, y) = \mu_{\mathcal{R}^2}(x, z) \leq \mu_{\mathcal{R}}(x, z) \geq \tau(x, y).$$

Данное соотношение возможно только при замене $\leq$ и $\geq$ на $=$. Таким образом, получаем, что $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$. Согласно определению, $\mathcal{R}^k = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{k-1}$. Поэтому из равенства $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$ получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Как следствие из данной теоремы, получаем, что, если $\mathcal{R}$ - предпорядок, то $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$

Нечеткое бинарное отношение называется **антисимметричным**, если $\forall (x, y) \in U \times U:\ x \neq y$
$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \neq \mu_{\mathcal{R}}(y, x)$ или $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(y, x) = 0$.

Нечеткое бинарное отношение называется **совершенно антисимметричным**, если $\forall (x, y) \in U \times U:\ x \neq y$
$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_{\mathcal{R}}(y, x) = 0$.

Из определений непосредственно следует, что любое совершенное антисимметричное отношение будет и антисимметричным отношением.

Антисимметричное нечеткое отношение предпорядка называется нечетким **отношением порядка**.

В различных работах по нечетким отношениям вводятся понятия нечеткого отношения полного порядка, частичного порядка, совершенного порядка и т.п. Оказывается, что эти отношения индуцируют соответствующие порядки в универсуме U. В рамках этих работ изучаются классические для отношений порядка понятия: наибольший и наименьший элементы, верхний и нижний пределы, максимальная цепь и т.п. Это довольно большой и очень интересный раздел теории нечетких отношений. Однако, даже для ознакомления с ним необходимо достаточно подробное ознакомление с обычными отношениями порядка. Объем курса, к сожалению, не позволяет провести такой экскурс, поэтому остановимся на других свойствах нечетких бинарных отношений.

Мы рассмотрим более подробно отношение подобия и связанные с ним отношения различия, сходства и их свойства. Эти отношения интересны для нас тем, что они имеют интересные приложения в задачах обработки информации, демонстрирующие новые возможности такой обработки, предоставляемые введением и учетом нечеткости.

Отношение подобия

Нечетким отношением подобия называется транзитивное рефлексивное симметричное нечеткое бинарное отношение.

Очевидно, что отношение подобия является предпорядком.

Пример 10 *Для любого $a: \; 0 \le a \le 1$ нечеткое бинарное отношение (2.13) является отношением подобия*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & a & a & a & a \\ \hline a & 1 & a & a & a \\ \hline a & a & 1 & a & a \\ \hline a & a & a & 1 & a \\ \hline a & a & a & a & 1 \\ \hline \end{array} \tag{2.13}$$

Итак, пусть $\mathcal{R}$ - отношение подобия, определенное на $U \times U$. Теперь рассмотрим его дополнение в $U \times U$, т.е. отношение $\overline{\mathcal{R}}$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \; \forall (x, y) \in U \times U.$$

Достаточно очевидно, что отношение $\overline{\mathcal{R}}$ является симметричным и антирефлексивным (т.е. $\mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y) = 0 \; \forall (x, y) \in U \times U$). Из $(\max - \min)$ -транзитивности $\mathcal{R}$ следует, что

$$1 - \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, z) \ge \max_y \min[(1 - \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y)), (1 - \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(y, z))] \tag{2.14}$$

Из теоремы Де-Моргана $\overline{\mathcal{R}} \cap \overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{R} \cup \mathcal{L}}$ непосредственно следует, что

$$\min[(1 - \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y)), (1 - \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(y, z))] = 1 - \max[\mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y), \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(y, z)].$$

Таким образом, (2.14) можно переписать следующим образом:

$$1 - \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, z) \ge \max_y [1 - \max(\mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y), \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(y, z))]$$

или, что то же самое,

$$\mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, z) \le \min_y \max(\mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y), \mu_{\overline{\mathcal{R}}}(y, z)). \tag{2.15}$$

Последнее выражение определяет (min-max) - транзитивность.

Нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами антирефлексивности, симметричности и (min-max) - транзитивности называется отношением различия.

Справедливо следующее

Утверждение 15 *Отношение различия $\mathcal{R}$ определяет метрику в U следующим образом:*

$$d(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(x, y), \; x \in U, \; y \in U. \tag{2.16}$$

Доказательство. Проверим аксиомы расстояния для (2.16).

1. $d(x, y) \ge 0 \; \forall x, y \in U$ - очевидно.
2. $d(x, x) = 0 \; \forall x \in U$ - следствие антирефлексивности отношения различия $\mathcal{R}$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ - следствие симметричности отношения различия $\mathcal{R}$.
4. $d(x, y) * d(y, z) \ge d(x, z)$ - следствие (2.15) при определении операции $*$ как (min-max)-транзитивности.

Утверждение доказано.

Будем называть расстояние (2.16) (min-max) - расстоянием в U.

Если $\mathcal{R}$ - отношение подобия, то, очевидно, (min-max) - расстоянием будет $d(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, y)$.

Итак, имея (построив) отношение подобия, мы можем ввести функцию расстояния на элементах универсального множества. Однако, требование транзитивности часто является слишком "жестким": реальные результаты экспертных опросов часто не транзитивны [25]. В этой ситуации мы должны либо "заставлять" экспертов давать транзитивные ответы, либо предложить процедуру вычисления расстояния для отношений без транзитивности. Последнее возможно, и базовую роль в такой процедуре играет понятие транзитивного замыкания.

Рефлексивное и симметричное отношение называется отношением сходства.

Достаточно очевидно, что, если $\mathcal{R}$ - отношение сходства, то $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, где "$\circ$" - (max-min) - композиция, также является отношением сходства, т.е. (max-min) - композиция сохраняет рефлексивность и симметричность.

В таком случае, если $\mathcal{R}$ - отношение сходства, то $\hat{\mathcal{R}}$ - отношение подобия. В таком случае (min-max) - расстояние, порожденное $\mathcal{R}$, можно определить следующим образом:

$$d_{\mathcal{R}}(x, y) = 1 - \mu_{\hat{\mathcal{R}}}(x, y).$$

Итак, теперь мы можем, имея минимальные ограничения на ответы экспертов, вводить достаточно корректно и естественно расстояние между различными порой довольно экзотическими понятиями. Например, имея оценки сходства людей различных национальностей, "вычислять" расстояния между национальностями.

Для большого класса задач анализа информации, в частности, проблем распознавания образов и кластер-анализа, большое значение имеет следующая теорема.

Теорема 2 *Пусть $\mathcal{R}$ - отношение подобия в $U \times U$. Тогда*

$$\mathcal{R} = \max_{\alpha} \alpha \times \mathcal{R}_{\alpha},\ 0 < \alpha \leq 1,$$

где $\mathcal{R}_{\alpha}$ - отношения эквивалентности в смысле обычной теории множеств.

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{R}_{\alpha}$ есть отношение эквивалентности, т.е. является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

1. Так как $\mathcal{R}$ - отношение подобия, то $\mu_{\mathcal{R}}(x, x) = 1$, и, следовательно, $(x, x) \in \mathcal{R}_{\alpha}\ \forall x \in U,\ \forall \alpha \in [0, 1]$. Таким образом, $\mathcal{R}_{\alpha}$ рефлексивно $\forall \alpha \in [0, 1]$.

2. Пусть $(x, y) \in \mathcal{R}_{\alpha},\ \alpha \in [0, 1]$. Докажем, что $(y, x) \in \mathcal{R}_{\alpha}$. Если $(x, y) \in \mathcal{R}_{\alpha}$, то $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha$, и, в силу симметричности $\mathcal{R}$, $\mu_{\mathcal{R}}(y, x) \geq \alpha$. Из последнего неравенства непосредственно следует, что $(y, x) \in \mathcal{R}_{\alpha}$. Таким образом, $\mathcal{R}_{\alpha}$ симметрично $\forall \alpha \in [0, 1]$.

3. Пусть $(x, y) \in \mathcal{R}_{\alpha},\ (y, z) \in \mathcal{R}_{\alpha},\ \alpha \in [0, 1]$. Докажем, что $(x, z) \in \mathcal{R}_{\alpha}$. Если $(x, y) \in \mathcal{R}_{\alpha}$, то $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \geq \alpha$, аналогично $\mu_{\mathcal{R}}(y, z) \geq \alpha$. В силу транзитивности $\mathcal{R}$, $\mu_{\mathcal{R}}(x, z) \geq \alpha$. Из последнего неравенства непосредственно следует, что $(x, z) \in \mathcal{R}_{\alpha}$. Таким образом, $\mathcal{R}_{\alpha}$ транзитивно $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Поскольку $\mathcal{R}_{\alpha}$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, то $\mathcal{R}_{\alpha}$ - отношение эквивалентности.

Теорема доказана.

Данная теорема имеет интересные приложения в распознавании образов и кластеризации нечетко определенной информации. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 11 *Пусть* $U = \{A, B, C, D, E\}$, $\mathcal{R}$ *- отношение сходства, заданное (2.17).*

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ \hline B & 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ \hline C & 0{,}7 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ \hline D & 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ \hline E & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \\ \hline \end{array} \tag{2.17}$$

В соответствии с теоремой 2 мы можем следующим образом декомпозировать (2.17) на отношения эквивалентности:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ \hline 0{,}8 & 1 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ \hline 0{,}7 & 0{,}7 & 1 & 0{,}7 & 0{,}7 \\ \hline 1 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1 & 0{,}9 \\ \hline 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1 \\ \hline \end{array} = \max_\alpha \left(0,7 \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}; \right.$$

$$\left. 0,8 \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}; 0,9 \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}; 1,0 \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

Таким образом, мы получаем следующую систему вложенных классов, соответствующих данному отношению подобия:

α *- уровень*	*Количество классов*	*Содержимое классов*
0,7	*1*	*{A, B, C, D, E}*
0,8	*2*	*{A, B, D, E}, {C}*
0,9	*3*	*{A, D, E}, {B}, {C}*
1,0	*4*	*{A, D}, {B}, {C}, {E}*

Таким образом, мы можем использовать данный аппарат для решения различных задач "вскрытия" внутренней структуры довольно сложных объектов. Например, мы можем построить отношение сходства между политиками (причем, на довольно объективных основаниях - например, по результатам голосования по различным вопросам). После этого мы можем построить систему классов для возможных α - уровней. Эти классы будут описывать возможные коалиции и блоки, которые могут возникнуть при том или ином развитии политического процесса.

Справедлива и теорема, обратная к теореме 2.

Теорема 3 *Пусть* $\mathcal{R}_{\alpha_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ - *обычные отношения эквивалентности;* $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \leq 1$; $\mathcal{R}_{\alpha_i} \subset \mathcal{R}_{\alpha_{i-1}}$. *Тогда отношение*

$$\mathcal{R} = \max_{\alpha} \alpha \times \mathcal{R}_{\alpha},\ 0 < \alpha \leq 1,$$

есть отношение подобия.

Доказательство. Докажем, что при выполнении условий теоремы отношение $\mathcal{R}$ будет действительно отношением подобия, т.е. обладать свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

1. Так как $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$, то $(x, x) \in \mathcal{R}_1$, и, следовательно,

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, x) = 1\ \forall x \in U.$$

2. Симметричность $\mathcal{R}$ вытекает из симметричности каждого $\mathcal{R}_{\alpha}$.

3. Пусть $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = a,\ \mu_{\mathcal{R}}(y, z) = b$. Обозначим через с $\min(a, b)$. Тогда

$$(x, y) \in \mathcal{R}_c,\ (y, z) \in \mathcal{R}_c.$$

В силу транзитивности $\mathcal{R}_c$ получаем, что $(x, z) \in \mathcal{R}_c$.
Следовательно,

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, z) \geq \max_{y}[min\{\mu_{\mathcal{R}}(x, y),\ \mu_{\mathcal{R}}(y, z)\}]\ \forall x, y, z \in U.$$

Теорема доказана.

Глава 3

Элементы теории приближенных рассуждений

Системы нечеткого логического вывода играют важную роль в многочисленных приложениях теории нечетких множеств, таких как нечеткие экспертные системы, нечеткие контроллеры и многие другие [51], [29]. В основе таких систем лежат логические правила вида *"Если ..., то ..."*, в которых посылки и выводы являются нечеткими понятиями. Такого рода приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык, распознавать сложные образы (например, почерк), принимать решения в сложной и не полностью определенной среде.

Теория приближенных рассуждений базируется на теории возможностей и для ее полного описания необходимо введение большого числа дополнительных понятий, поэтому мы проведем лишь краткий анализ методов приближенных рассуждений.

3.1 Приближенные рассуждения на основе modus ponens

Напомним правило вывода modus ponens в обычной логике. Это правило можно записать следующим образом:

Посылка 1:	*если x есть A, то y есть B*
Посылка 2:	*x есть A*
Следствие:	*y есть B,*

где x и y - имена объектов, A, B - обозначения понятий областей рассуждения U и V соответственно. Можно привести следующий пример такого типа вывода.

Пример 12 *правила вывода modus ponens в обычной логике.*

Посылка 1:	*если слива красная, то слива спелая*
Посылка 2:	*эта слива красная*
Следствие:	*эта слива спелая*

Обобщение данного правила на случай, когда посылки являются нечеткими понятиями было предложено в работе [116] и развито в работах [113], [114], [82], [79], [74]. Общую схему этого вывода можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \textit{Посылка 1:} & \textit{если } x \textit{ есть } A, \textit{ то } y \textit{ есть } B \\ \textit{Посылка 2:} & x \textit{ есть } A' \\ \hline \textit{Следствие:} & y \textit{ есть } B', \end{array} \tag{3.1}$$

где x и y - имена объектов, A, A', B, B' - обозначения нечетких подмножеств областей рассуждения U, U, V и V соответственно. Можно привести следующий пример такого типа вывода.

Пример 13 *правила вывода modus ponens в нечеткой логике.*

$$\begin{array}{ll} \textit{Посылка 1:} & \textit{если слива красная, то слива спелая} \\ \textit{Посылка 2:} & \textit{эта слива очень красная} \\ \hline \textit{Следствие:} & \textit{эта слива очень спелая} \end{array}$$

Данная форма нечеткого вывода может быть рассмотрена как обобщение modus ponens. Действительно, мы получаем обычный modus ponens при $A' = A$ и $B' = B$.

Посылка 1 в виде *если x есть A, то y есть B* представляет некоторое соответствие между A и B. В литературе приводится много отношений, которые могут быть формализацией такого рода соответствия. Приведем некоторые из них.

Пусть A и B - нечеткие множества в универсальных множествах U и V с функциями принадлежности $\mu_A(u)$ и $\mu_B(v)$ соответственно; $\times$, $\cup$, $\cap$, $\neg$ и $\oplus$ - декартово произведение, объединение, пересечение, дополнение и ограниченная сумма для нечетких множеств.

В [116] предлагаются следующие нечеткие отношения, которые могут служить формализацией нечеткого условного высказывания *"Если x есть A, то y есть B"*.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m &= (A \times B) \cup (\neg A \times V) = \\ &= \max\left[\min\left(\mu_A(u), \mu_B(v)\right), 1 - \mu_A(u)\right], \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_a &= (\neg A \times V) \oplus (U \times B) = \\ &= \min\left[\mu_A(u), \mu_B(v)\right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Позже в были предложены и проанализированы следующие такие отношения:

$$\mathcal{R}_s = A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B = \mu_A(u) \xrightarrow{s} \mu_B(v), \tag{3.4}$$

где

$$\mu_A(u) \xrightarrow{s} \mu_B(v) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{при} & \mu_A(u) \le \mu_B(v), \\ 0 & \text{при} & \mu_A(u) > \mu_B(v); \end{array} \right. \tag{3.5}$$

$$\mathcal{R}_g = A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B = \mu_A(u) \xrightarrow{g} \mu_B(v), \tag{3.6}$$

где

$$\mu_A(u) \xrightarrow{g} \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mu_A(u) \le \mu_B(v), \\ \mu_B(v) & \text{при} \quad \mu_A(u) > \mu_B(v); \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{sg} &= \left(A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B\right) \cup \left(\neg A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times \neg B\right) = \\ &= \min\left[\mu_A(u) \xrightarrow{s} \mu_B(v), (1-\mu_A(u)) \xrightarrow{g} (1-\mu_B(v))\right]; \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gg} &= \left(A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B\right) \cap \left(\neg A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times \neg B\right) = \\ &= \min\left[\mu_A(u) \xrightarrow{g} \mu_B(v), (1-\mu_A(u)) \xrightarrow{g} (1-\mu_B(v))\right]; \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{gs} &= \left(A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B\right) \cap \left(\neg A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times \neg B\right) = \\ &= \min\left[\mu_A(u) \xrightarrow{g} \mu_B(v), (1-\mu_A(u)) \xrightarrow{s} (1-\mu_B(v))\right]; \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ss} &= \left(A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B\right) \cap \left(\neg A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times \neg B\right) = \\ &= \min\left[\mu_A(u) \xrightarrow{s} \mu_B(v), (1-\mu_A(u)) \xrightarrow{s} (1-\mu_B(v))\right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Следствие B' в обобщенном modus ponens (3.1) получается получается из посылки 1 и посылки 2 как $\max - \min -$ композиция (раздел 2.2) нечеткого множества A' и нечеткого отношения, полученного в одном из правил (3.2) - (3.11). Таким образом, применяя разные формализации нечеткого условного высказывания *"Если x есть A, то y есть B"*, мы получаем из одной посылки A', вообще говоря, разные выводы:

$$B'_m = A' \circ \mathcal{R}_m = A' \circ \left[(A \times B) \cup (\neg A \times V)\right], \tag{3.12}$$

$$B'_a = A' \circ \mathcal{R}_a = A' \circ \left[(\neg A \times V) \oplus (U \times B)\right], \tag{3.13}$$

$$B'_s = A' \circ \mathcal{R}_s = A' \circ \left[A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B\right], \tag{3.14}$$

$$B'_g = A' \circ \mathcal{R}_g = A' \circ \left[A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B\right], \tag{3.15}$$

$$
\begin{aligned}
B'_{sg} &= A' \circ \mathcal{R}_{sg} = \\
&= A' \circ \left[\left(A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B \right) \cup \left(\neg A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times \neg B \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
B'_{gg} &= A' \circ \mathcal{R}_{gg} = \\
&= A' \circ \left[\left(A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B \right) \cap \left(\neg A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times \neg B \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

$$
\begin{aligned}
B'_{gs} &= A' \circ \mathcal{R}_{gs} = \\
&= A' \circ \left[\left(A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B \right) \cap \left(\neg A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times \neg B \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
B'_{ss} &= A' \circ \mathcal{R}_{ss} = \\
&= A' \circ \left[\left(A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B \right) \cap \left(\neg A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times \neg B \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Какой из этих выводов "лучше"? Как часто бывает в теории нечетких множеств, мы имеем целый спектр вполне корректных обобщений конкретного математического факта или теории. Выбор конкретного такого обобщения для решения конкретной прикладной задачи зависит от свойств предметной области, математической интуиции и инженерного опыта разработчика системы.

Примером такого неформального рассуждения может быть следующий. В [85] для сравнения различных методов нечетких рассуждений формулируются интуитивно разумные требования к связи между A' и B' в (3.1). В качестве A' берутся высказывания

$A' =$ *очень* A,

$A' =$ *более или менее* A,

$A' =$ *не* A.

Каким может быть B' для таких A'? Если существует сильная причинная связь между высказываниями *"x есть A"* и *"y есть B"* в высказывании *"Если x есть A, то y есть B"*, то для $A' =$ *очень* A мы должны требовать $B' =$ *очень* B. Если причинная связь не является жесткой, для указанного A' можно требовать выполнения и $B' = B$. Если, например, утверждение *"Если x есть A, то y есть B"* неявно подразумевает утверждение *"Если x есть A, то y есть B, иначе y не есть B*, то для $A' =$ *не* A мы должны требовать выполнения $B' =$ *не* B.

Можно составить набор такого рода требований к B' для различных A' и проверить их выполнение различными отношениями по формулам (3.12) - (3.19).

3.2 Приближенные рассуждения на основе modus tollens

Напомним правило вывода modus tollens в обычной логике. Это правило можно записать следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Посылка 1:} & \textit{если } x \textit{ есть } A\textit{, то } y \textit{ есть } B \\
\textit{Посылка 2:} & y \textit{ есть не } B \\
\hline
\textit{Следствие:} & x \textit{ есть не } A,
\end{array}
$$

где x и y - имена объектов, A, B - обозначения понятий областей рассуждения U и V соответственно. Можно привести следующий пример такого типа вывода.

Пример 14 *правила modus tollens в обычной логике.*

Посылка 1:	*если слива красная, то слива спелая*
Посылка 2:	*эта слива не спелая*
Следствие:	*эта слива не красная*

Обобщение данного правила на случай, когда посылки являются нечеткими понятиями было предложено в также в [116] и развито в работах [113], [114], [82], [79], [74]. Общую схему этого вывода можно записать следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Посылка 1:} & \textit{если } x \textit{ есть } A\textit{, то } y \textit{ есть } B \\
\textit{Посылка 2:} & y \textit{ есть не } B' \\
\hline
\textit{Следствие:} & x \textit{ есть не } A',
\end{array}
\tag{3.20}
$$

где x и y - имена объектов, A, A', B, B' - обозначения нечетких подмножеств областей рассуждения U, U, V и V соответственно. Можно привести следующий пример такого типа вывода.

Пример 15 *правила modus tollens в нечеткой логике.*

Посылка 1:	*если слива красная, то слива спелая*
Посылка 2:	*эта слива слегка спелая*
Следствие:	*эта слива более или менее красная*

Данная форма нечеткого вывода может быть рассмотрена как обобщение modus tollens. Действительно, мы получаем обычный modus tollens при $A' = A$ и $B' = B$.

Так же как и при анализе правил нечеткого вывода на основе modus ponens (раздел 3.1), мы можем представить *Посылку 1* как некоторое соответствие между A и B.

Аналогично обобщенному modus ponens, следствие A' получается в результате $\max - \min -$ композиции соответствующего отношения (3.2) - (3.11) и нечеткого множества B':

$$A'_m = \mathcal{R}_m \circ B' = [(A \times B) \cup (\neg A \times V)] \circ B', \tag{3.21}$$

$$A'_a = \mathcal{R}_a \circ B' = [(\neg A \times V) \oplus (U \times B)] \circ B', \tag{3.22}$$

$$A'_s = \mathcal{R}_s \circ B' = \left[A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B\right] \circ B', \tag{3.23}$$

$$A'_g = \mathcal{R}_g \circ B' = \Big[A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B\Big] \circ B', \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} A'_{sg} &= \mathcal{R}_{sg} \circ B' = \\ &= \Big[\Big(A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B\Big) \cup \Big(\neg A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times \neg B\Big)\Big] \circ B', \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} A'_{gg} &= \mathcal{R}_{gg} \circ B' = \\ &= \Big[\Big(A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B\Big) \cap \Big(\neg A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times \neg B\Big)\Big] \circ B', \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} A'_{gs} &= \mathcal{R}_{gs} \circ B' = \\ &= \Big[\Big(A \times V \overset{g}{\Longrightarrow} U \times B\Big) \cap \Big(\neg A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times \neg B\Big)\Big] \circ B', \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} A'_{ss} &= \mathcal{R}_{ss} \circ B' = \\ &= \Big[\Big(A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times B\Big) \cap \Big(\neg A \times V \overset{s}{\Longrightarrow} U \times \neg B\Big)\Big] \circ B'. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Проблема выбора наиболее адекватного конкретной задаче метода нечетких рассуждений на основе modus tollens решается так же, как и в случае modus ponens (раздел 3.1).

3.3 Формализация логических связок

Выше мы говорили о том, что операции пересечения и объединения и дополнения в множестве $\mathcal{P}(U)$ всех нечетких множеств, заданных на одном универсальном множестве U могут быть определены различными способами. Эти способы являются различными обобщениями соответствующих операций для обычных множеств и берут свое начало в работах по многозначным логикам, где возникают аналогичные проблемы. При использовании различных операций, мы получаем также различные интерпретации логических связок "И", "ИЛИ", "НЕ", соответствующих операциям пересечения, объединения и дополнения.

Наиболее общим представлением операторов пересечения и объединения является их определение в классе треугольных норм (t - норм) и конорм (t - конорм).

Треугольные нормы

Треугольной нормой называется действительная двухместная функция $\top : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\top(0,0) = 0,\ \top(\mu_A, 1) = \top(1, \mu_A) = \mu_A$ (ограниченность);

2. $\top(\mu_A, \mu_B) \leq \top(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \leq \mu$ и $\mu \leq \mu_D$ (монотонность);
3. $\top(\mu_A, \mu_B) = \top(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность);
4. $\top(\mu_A, \top(\mu_B, \mu_C)) = \top(\top(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ (ассоциативность).

Пара $([0,1], \top)$ образует коммутативную полугруппу с единицей.

Пример 16 *Можно привести следующие примеры t - норм:*
1. $\min(\mu_A, \mu_B)$*;*
2. $\top_p(\mu_A, \mu_B) = \mu_A \times \mu_B$*;*
3. $\top_m(\mu_A, \mu_B) = \max(0, \mu_A + \mu_B - 1)$*;*
4.
$$\top_w(\mu_A, \mu_B) = \begin{cases} \mu_A, & \textit{если } \mu_B = 1 \\ \mu_B, & \textit{если } \mu_A = 1 \\ 0, & \textit{в других случаях} \end{cases}$$

Не трудно видеть, что $\top_w(\mu_A, \mu_B) \leq \top_m(\mu_A, \mu_B) \leq \top_p(\mu_A, \mu_B) \leq \min(\mu_A, \mu_B)$.

Треугольной конормой называется действительная двухместная функция $\perp : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:
1. $\perp(1,1) = 1,\ \perp(\mu_A, 0) = \perp(0, \mu_A) = \mu_A$ (ограниченность);
2. $\perp(\mu_A, \mu_B) \geq \perp(\mu_C, \mu_D)$, если $\mu_A \geq \mu_C$ и $\mu_B \geq \mu_D$ (монотонность);
3. $\perp(\mu_A, \mu_B) = \perp(\mu_B, \mu_A)$ (коммутативность);
4. $\perp(\mu_A, \perp(\mu_B, \mu_C)) = \perp(\perp(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ (ассоциативность).

Не трудно видеть, что операторы $\top$ и $\perp$ являются сопряженными в том смысле, что $\perp(\mu_A, \mu_B) = 1 - \top(1 - \mu_A, 1 - \mu_B)$.

Пример 17 *Можно привести следующие примеры t - конорм:*
1. $\max(\mu_A, \mu_B)$*;*
2. $\perp_p(\mu_A, \mu_B) = \mu_A + \mu_B - \mu_A \times \mu_B$*;*
3. $\perp_m(\mu_A, \mu_B) = \min(1, \mu_A + \mu_B)$*;*
4.
$$\perp_w(\mu_A, \mu_B) = \begin{cases} \mu_A, & \textit{если } \mu_B = 0 \\ \mu_B, & \textit{если } \mu_A = 0 \\ 1, & \textit{в других случаях} \end{cases}$$

Не трудно видеть, что $\perp_w(\mu_A, \mu_B) \geq \perp_m(\mu_A, \mu_B) \geq \perp_p(\mu_A, \mu_B) \geq \max(\mu_A, \mu_B)$.

Отрицания

Наиболее общее определение функции отрицания в теории нечетких множеств может быть сформулировано следующим образом.

Отрицанием называется функция $c : [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим условиям:
1. $c(0) = 1$, $c(1) = 0$;
2. c - не возрастающая функция, т.е. если $\mu_A \leq \mu_B$, то $c(\mu_A) \geq c(\mu_B)$.

Пример 18 *Можно привести следующие примеры отрицаний.*

1. $c(\mu) = 1 - \mu$*;*

2. $c_r(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2}$*;*

3. $c_\lambda(\mu) = \frac{1-\mu}{1+\lambda\times\mu}$, $-1 < \lambda < \infty$*;*

4.

$$c_\alpha(\mu) = \begin{cases} 1 & \textit{при } \mu \le \alpha \\ 0 & \textit{при } \mu > \alpha \end{cases}$$

3.4 Приближенные рассуждения в прикладных задачах

Проиллюстрируем применение аппарата приближенных рассуждений на примере нечетких контроллеров. Под нечеткими контроллерами понимается программно-аппаратные системы, управляющие некоторыми процессами (от английского слова control – управление). Такого рода системы имеют огромное число приложений – от бытовой техники до управления сложными технологическими процессами [29], [51]. Рынок нечетких контроллеров оценивается в миллиарды долларов.

Для описания нечетких управляющих систем сформулируем основные понятия теории управляющих систем в классическом понимании.

Основные понятия теории управления

Понятие управления составило основу кибернетики как науки об общих законах управления и связи в живых и технических системах [10].

Концептуальная схема, в рамках которой формулируется любая задача управления, может быть представлена следующим образом (рис. 3.1).

Система управления на основе наблюдений среды и объекта управления и соответствия этих наблюдений цели формирует решение по выбору управляющего воздействия на объект (в частном случае это может быть "пустое" решение). Если при сложившейся ситуации в среде и на объекте управления цель достигнута - продолжается наблюдение за средой и объектом. Если цель не достигается - необходимо некоторое воздействие на объект. Это воздействие выбирается блоком принятия решений на основе модели среды и модели объекта управления и выполняется блоком реализации решений. Воздействие вызывает переход объекта в новое состояние и, как следствие, некоторые возмущения в среде. Новое состояние пары "объект управления - среда" может быть ближе к цели или, наоборот, удалять нас от нее. Мы можем оценить это, наблюдая объект и среду и сравнивая сложившуюся реальную ситуацию с целью. Результат такого наблюдения и сравнения инициирует либо новые решения в случае, когда цель не достигается, либо пассивное наблюдение в случае, когда цель достигнута.

Различные аспекты представленной концептуальной схемы изучаются различными теориями. Так, например, связи между объектом и системой управления, как и связи между средой и системой управления, изучаются в рамках теории кодирования или, более широко, теории информации; выбор разумного (оптимального, целесообразного) решения составляет основную задачу теории принятия решений;

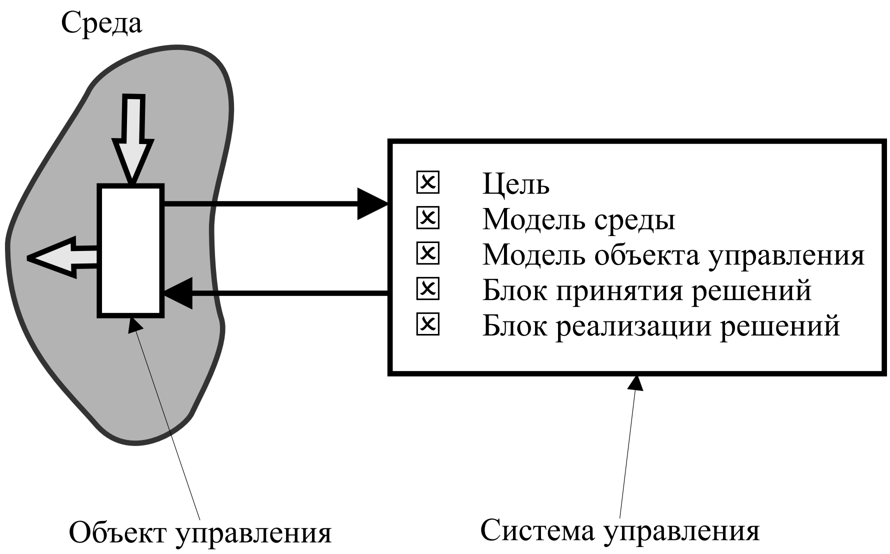

Рис. 3.1:

теория автоматов, теория игр, теория оптимального управления и многие другие - это углубленное изучение различных аспектов этой схемы.

Выделяются различные типы задач управления. Например, в [10] описываются задачи стабилизации, выполнения программы, слежения и оптимизации. Даже краткий обзор подобных исследований может занять слишком много места, поэтому ниже основное внимание уделяется не столько описанию таких задач и методов их решения, сколько требованиям к описанию основных элементов управляющей системы ("языку" формализации) в классических постановках задач.

Цель. В классических постановках задач управления предполагается, что цель задается в виде некоторой функции (например, в задачах слежения и выполнения программ), некоторой области заданных значений контролируемого параметра (задачи стабилизации), вероятности наступления некоторого события (например, вероятность поражения цели должна быть не ниже 0,999). Имея такое представление цели и описание системы и среды в виде аналогичных объектов (функций и/или точек в некотором пространстве), мы имеем возможность сравнивать сложившуюся ситуацию на объекте управления с целью с помощью расстояние в некотором пространстве.

Модель среды и модель объекта управления.

В классическом понимании понятие модели основывается на наличии некоторого сходства между двумя объектами. При этом слова "сходство" и "объект" понимаются в очень широком смысле. Сходство может быть чисто внешним, оно может относиться к внутренней структуре внешне совсем непохожих объектов или к определенным чертам поведения объектов, не имеющим ничего общего ни по форме, ни по структуре. Считается, что, если между двумя объектами может быть установлено сходство в каком- либо смысле, то между этими объектами существует отношение оригинала и модели. Это означает, что один из этих объектов может рассматриваться как оригинал, а второй - как его модель.

Для кибернетических систем наиболее важным сходством между системами, приводящим к отношению "оригинал - модель" является сходство их поведения.

Математической моделью системы называется ее описание на каком-либо формальном языке, позволяющее выводить суждение о некоторых чертах поведения этой системы при помощи формальных процедур над ее описанием. Виды математических моделей, используемые в качестве моделей среды и объекта управления, весьма разнообразны. Они могут представлять собой характеристики систем, заданные функциональными зависимостями или графиками, уравнениями, описывающими движение систем, автоматами и пр.

Блок принятия решений, блок реализации решений.

В задачах принятия решений по управлению считается, что, на основе модели среды и модели объекта управления, мы можем сформировать множество альтернатив (вариантов воздействия на объект) и для каждой из них определить, насколько данное воздействие "приблизит" нас к цели. Справедливость этого предположения во многом зависит от "качества" соответствующих моделей.

Основные идеи нечеткого управления

Как видно из приведенного краткого обзора основных понятий теории управления, применение классических методов возможно при наличии модели среды и модели объекта управления. Что делать, если таких моделей нет? Или модели есть, но для их "обсчета" требуются значительные ресурсы? Для "модельных" задач последнее может быть не существенным, однако для практических задач большие ресурсы могут быть критичными (например, для систем управления в реальном времени управляющее воздействие должно вырабатываться не более, чем за некоторое время Δt, иначе решение, пусть самое лучшее, уже никому не нужно; для бортовых систем управления критичным могут быть габариты и вес компьютера: если для работы с моделью требуется супер-ЭВМ, то ее не возьмешь в самолет или автомобиль).

Нечеткие контроллеры как раз и применяются в этих ситуациях. Основная идея заключается в "подмене" сложной математической модели реального процесса или объекта на логико-лингвистическую модель управления этим процессом (объектом). В рамках этого подхода предлагается использовать опыт оператора, управляющего объектом. Стратегия управления, используемого оператором, часто может быть сформулирована как набор правил, которые можно выполнить человеку, но трудно формализовать, используя обычные алгоритмы. Трудность формализации возникает из-за того, что человек использует качественные понятия (например, "давление пара *большое*", скорость изменения параметра *нормальная*", "ситуация *стабильная*" и т.п.) при описании условий принятия конкретных решений.

При фиксированной цели управления (например, сохранение значения управляемого параметра g в некоторой области допустимых значений G) модель процесса управления может быть выражена в виде множества *"Если* $\cdots$, *то* $\cdots$*"* - правил следующим образом.

Пусть состояние управляемого объекта Θ описывается набором значений качественных признаков $I(\Theta)$. Множество значений признаков $\mathcal{D}$ фиксировано и является конечным ($\mathcal{D} = \{d_1, \cdots, d_m\}$). Процесс описывается последовательностью состояний объекта в моменты времени $t_1, t_2, \cdots \left\{ I(\Theta_{t_i})_{i=1,2,\cdots} \right\}$. Для достижения цели управления ("удержания" значения управляемого параметра g в области G в нашем случае) у нас есть возможность изменять значения некоторых управляемых параметров из множества $\mathcal{A} = \{a_1, \cdots, a_n\}$.

Для описания идеи использования нечетких лингвистических регуляторов рассмотрим простейшую ситуацию $m = 1, n = 1$, то есть ситуацию, когда $\mathcal{D} = \{d\}, \mathcal{A} = \{a\}$.

Как отмечалось выше, эксперт часто может сформулировать свой опыт управления только для качественных значений d и a. Пусть $d = \{d^1, \cdots, d^s\}$ и $a = \{a^1, \cdots, a^r\}$ - набор качественных значений d и a соответственно. Моделью d и a может служить лингвистическая переменная (раздел 4.1) с фиксированным множеством значений или, что то же самое - семантическое пространство (раздел 4.2). В этом случае d и a - названия соответствующих лингвистических переменных, d^i и a^j $(i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, r)$ - ее значения.

Пусть соответствующие нечеткие множества $\mu_{d^i}(u)$ и $\mu_{a^j}(v)$ определены в универсальных множествах U и V соответственно $(i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, r)$. Тогда правила, которые использует эксперт, можно сформулировать следующим образом: "Если $d = d^i$, то $a = a^j$". Например, "Если давление пара *очень высокое*, то открыть клапан *сильно*".

Таким образом, моделью объекта управления и среды является их лингвистическое описание; блок принятия решений работает как последовательность *"Если ..., то ..."* правил. Однако, как мог заметить внимательный читатель, в приведенной схеме есть некоторое противоречие. Действительно, возникает ситуация, когда элементы одной схемы описываются на разных "языках": в среде значения признаков - некоторые числа, отражающие значения физических измеряемых величин, а в модели управления значения признаков - качественные понятия. Система управления должна взять с объекта управления некоторые числа и выдать на объект опять же некоторые конкретные числа.

Для этого система управления имеет два интерфейса: представления физического значения признака в лингвистическом виде ("фазификатор") и представления получившегося в результате нечетких рассуждений лингвистического значения управляемого параметра в количественном виде ("дефазификатор"). Структурная схема нечеткого лингвистического регулятора представлена на рис. 3.2.

В рамках данной общей схемы может быть несколько вариаций. Например, на выходе блока представления количественных значений параметра в виде лингвистической переменной может быть лингвистическое значений с максимальной степенью принадлежности или набор лингвистических значений с указанием степени принадлежности конкретного количественного значения параметра к этим лингвистическим значениям (нечеткое множество типа 2 - раздел 1.1). Генерация количественного значения на выходе блока представления лингвистического значения в количественном виде может производиться по максимальному значению функции принадлежности, по расположению "центра масс" функции принадлежности или другими методами.

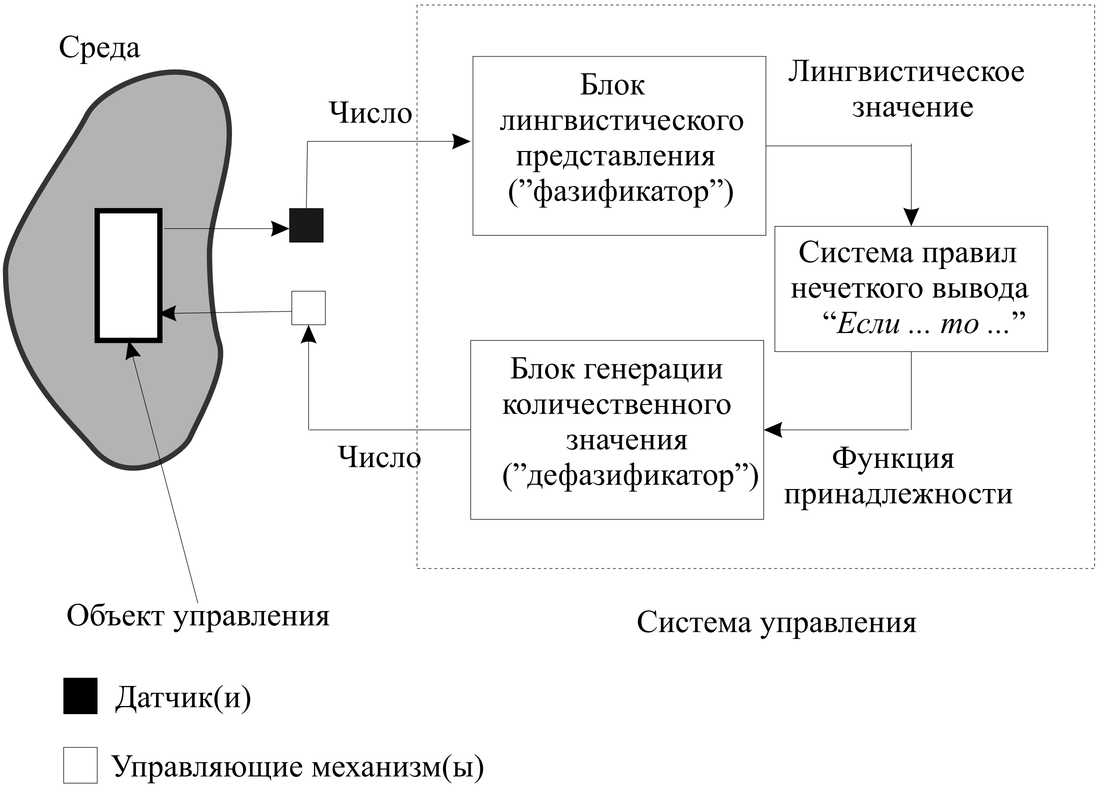

Рис. 3.2:

Различные такие варианты отражены в достаточно большом количестве работ по данному вопросу, опубликованной в рамках проекта FALCON (Fuzzy Algorothms and Logic in CONtol) в рамках Общеевропейской программы ESPIRIT и представлены практически на всех конференциях по теории нечетких множеств и ее приложениям.

Мы больше не имеем возможности детализировать проблемы приложений методов нечетких рассуждений в управлении. Отметим лишь, что принципы, изложенные в разделах 3.1 3.2 составляют теоретическую базу таких систем. Заменяя в приведенных в указанных разделах формулах операции max и min на $t-$ нормы и $t-$ конормы (раздел 3.3) мы получаем набор операторов, которые могут использоваться в нечетких лингвистических регуляторах.

Глава 4

Семантические пространства и их свойства

4.1 Понятие лингвистической переменной

Опираясь на понятие нечеткого множества Заде в [17] вводит понятие нечеткой переменной как тройки

$$\langle \alpha, U, G \rangle,$$

где α - наименование (имя) нечеткой переменной;

U - область ее определения (универсальное множество);

G - нечеткое множество в U, описывающее ограничения на возможные значения нечеткой переменной α (ее семантику).

В зависимости от характера множества U нечеткие переменные могут быть разделены на числовые и нечисловые. К числовым относятся нечеткие переменные, у которых $U \subset R^1$.

Дальнейшим шагом является введение понятия лингвистической переменной как пятерки

$$\langle A, T(A), U, V, M \rangle,$$

где A - название переменной;

$T(A)$ - терм-множества переменной A, т.е. множество названий лингвистических значений переменной A, причем каждое из таких значений - нечеткая переменная со значениями из универсального множества U;

V - синтаксическое правило (обычно грамматика), порождающее названия значений лингвистической переменной A;

M - семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной из $T(A)$ нечеткое подмножество универсального множества U.

Пример лингвистической переменной "Возраст" представлен на рис. 4.1

Заде различает *базовые термины* (молодой, среднего возраста, пожилой, ...) и *модификаторы* (очень, не-, слегка, ...). Модификаторы могут применяться как к базовым терминам (очень молодой, не старый, ...), так и к комбинациям базового

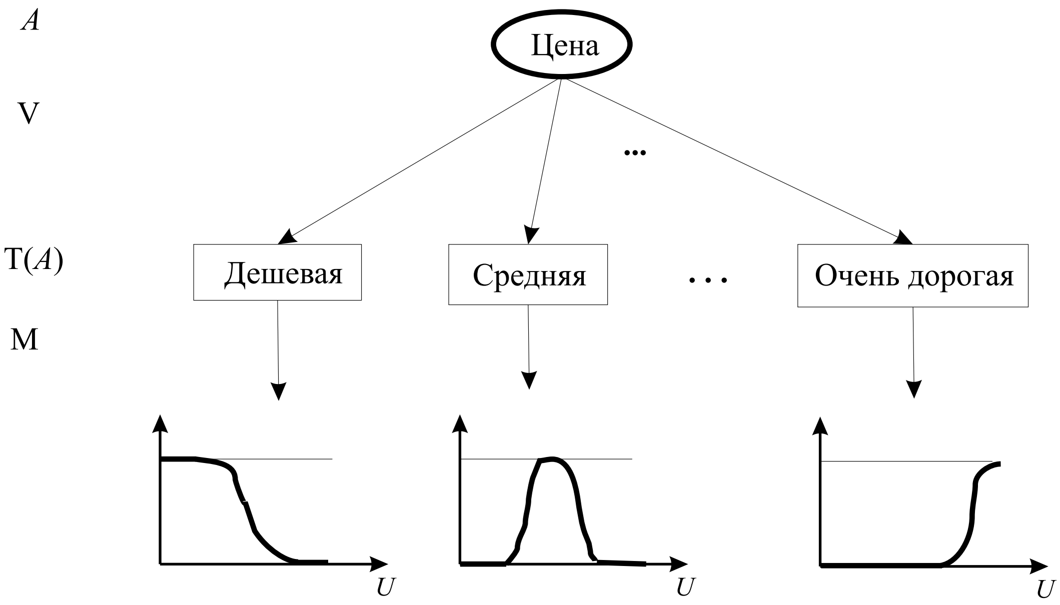

Рис. 4.1:

термина и модификатора (очень-очень старый, слегка не молодой, ...). Правила применения модификаторов задаются синтаксическим правилом V.

Разница между базовыми терминами и модификаторами заключается в следующем. Для базовых терминов функции принадлежности задаются, а модификаторы действуют как некоторые операторы над этими функциями. Например, в качестве "очень" предлагается следующая модификация функции принадлежности термина "молодой" [17]: $\mu\ \ (u) = \mu^2(u)$. Аналогично $\mu\ \ (u) = \mu^{1/2}(u)$ и т.п. Вопросы адекватности таких преобразований практически не изучались. Одна из причин этого заключается в большой неопределенности операций: для разных ситуаций могут быть разные результаты. Проблема заключается в том, что для разных контекстов функции принадлежности одного и того же термина могут быть разными. Эта проблема изучается в рамках концепции семантического пространства. Более подробно с теорией и приложениями лингвистической переменной можно ознакомиться в [17], мы же более подробно остановимся на концепции семантического пространства, его свойствах и приложениях.

4.2 Полные ортогональные семантические пространства (ПОСП)

Рассмотрим ситуацию, когда лингвистическая переменная $A =$ "РОСТ" имеет два терм – множества $T_1(A) = \{$низкий, высокий$\}$ и $T_2(A) = \{$низкий, средний , высокий$\}$.

Интуитивно ясно, что функции принадлежности понятий "низкий" и "высокий" в первом и во втором случае будут различаться: новое понятие "средний" модифицирует их, сдвигает к концам универсума (Рис. 4.2)

Последнее говорит о том, что семантика некоторого термина зависит от контекста, или набора значений соответствующей лингвистической переменной. Таким образом,

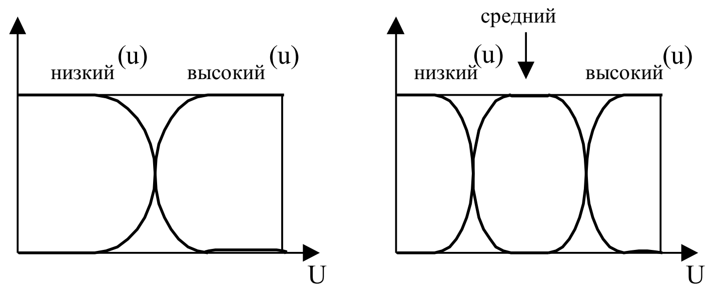

Рис. 4.2:

функция принадлежности любого термина без указания контекста, вообще говоря, не имеет смысла.

Будем называть семантическим пространством лингвистическую переменную с фиксированным терм-множеством, т.е. четверку

$$S = \langle A, T(A), U, M \rangle.$$

Иными словами, семантическое пространство - это набор нечетких переменных

$$S = \langle \alpha_1, U, G_1 \rangle, \ldots, \langle \alpha_n, U, G_n \rangle. \tag{4.1}$$

При этом для одного и того же имени A могут существовать различные пространства

$$S_1 = \langle A, T_1(A), U, M_1 \rangle, \ldots, S_k = \langle A, T_k(A), U, M_k \rangle.$$

Можно ли как-то сравнивать семантические пространства, выбирать наилучшее в некотором смысле ? Рассмотрим следующий пример.

Пример 19 *Рассмотрим процесс описания человеком некоторых реальных объектов на примере описания других людей. Описывая ВОЗРАСТ человека, мы можем использовать несколько вариантов множества значений признака "ВОЗРАСТ":*

- T_1 = *{молодой, старый };*
- T_2 = *{молодой, среднего возраста, старый };*

$\vdots$

- T_n = *{юный, очень молодой, ..., очень старый }.*

Какое из этих множеств лучше с точки зрения "легкости" описания возраста?

Множество T_1 не является таковым, так как существует много людей, для которых обозначения одинаково не подходят. Мы испытываем трудности описания из-за недостатка значений.

Множество T_n также является "плохим" из-за того, что для одного и того же реального объекта могут оказаться одинаково подходящими несколько значений признака.

Данный пример позволяет нам сформулировать следующую проблему выбора оптимального множества значений качественных признаков.

Проблема 1. *Можно ли, учитывая некоторые особенности восприятия человеком объектов реального мира и их описания, сформулировать правило выбора оптимального множества значений признаков, по которым описываются эти объекты? Возможны два критерия оптимальности:*

Критерий 1. Под оптимальными понимаются такие множества значений, используя которые человек испытывает минимальную неопределенность при описании объектов.

Критерий 2. Если объект описывается некоторым количеством экспертов, то под оптимальными понимаются такие множества значений, которые обеспечивают минимальную степень рассогласования описаний.

Вопросам оценки степени неопределенности процесса описания реальных объектов и методике выбора оптимального множества значений качественных признаков посвящен следующий раздел.

Для возможности оценки степени неопределенности необходимо сформулировать некоторые требования для функций принадлежности используемых понятий и их совокупностей, образующих семантическое пространство. Таким образом, ниже мы будем рассматривать не все возможные семантические пространства, а некоторое их подмножество.

При формулировке таких требований необходимо удовлетворить двум противоречивым критериям:

– требования должны быть достаточно "мягкими", чтобы получившееся подмножество было достаточно широким и включало в себя большинство практических ситуаций;

– требования должны быть достаточно "жесткими", чтобы давать возможность формального введения различных понятий и изучения их свойств.

Итак, рассмотрим семантическое пространство (4.1). В качестве его модели рассмотрим совокупность t функций принадлежности, заданных на одном универсальном множестве U. Для краткости будем обозначать такую совокупность s_t.

Будем считать, что функции принадлежности s_t определены на некотором отрезке $U \subseteq R^1$ и удовлетворяют следующим требованиям:

(1) нормальность [21]: $\forall j (1 \leq j \leq t) \quad \exists U_j^1 \neq \emptyset$, где $U_j^1 = \{u \in U : \quad \mu_j(u) = 1\}$, U_j^1 является отрезком;

(2) $\mu_j(u)$ не убывает слева от U_j^1 и не возрастает справа от U_j^1.

Данные ограничения являются довольно естественными для функций принадлежности понятий, образующих семантическое пространство. Действительно, (1) означает, что для каждого понятия существует хотя бы один объект, являющийся для него типичным; (2) может быть интерпретировано как требование плавности, мягкости границ используемых понятий.

В будущем нам понадобится использование наряду с функциями принадлежности и характеристических функций, поэтому к сформулированным требованиям добавим требование

(3) функции не могут иметь более двух точек разрыва первого рода.

Обозначим через L множество функций, удовлетворяющих требованиям (1) - (3).

Сформулируем также требования на совокупности функций из L, образующих множество s_t. Будем считать, что множество из t таких функций удовлетворяет следующим двум требованиям:

(4) полнота: $\forall u \in U \quad \exists j(1 \le j \le t): \quad \mu_j(u) \ne 0$;

(5) ортогональность: $\forall u \in U \quad \sum\limits_{j=1}^{t} \mu_j(u) = 1$.

Эти ограничения также являются довольно естественными. Требование (4) означает, что для каждого объекта найдется хотя бы одно понятие, его описывающее с ненулевой степенью; (5) означает достаточную разделимость понятий, образующих семантическое пространство, отсутствие синонимии или семантически близких терминов.

Будем обозначать через $G_t(L)$ множество из t функций из L, удовлетворяющих требованиям (4), (5).

Семантические пространства, функции принадлежности понятий которых принадлежат $G_t(L)$, будем называть полными ортогональными семантическими пространствами (ПОСП).

В рамках ПОСП можно ввести понятие степени нечеткости или меры внутренней неопределенности, которое позволяет выбирать наилучшие пространства для описания человеком реальных объектов (см. пример 19).

4.3 Степень нечеткости ПОСП

Прежде всего заметим, что определенное в 4.2 множество L функций является подмножеством множества S_2 интегрируемых на отрезке функций, поэтому мы можем ввести метрику на L, например,

$$\rho(f,g) = \int_U |f(u) - g(u)| du, \quad f \in L, \ g \in L.$$

Мы также можем ввести метрику в $G_t(L)$.

Лемма 1 *Пусть* $s_t \in G_t(L), \ s'_t \in G_t(L)$,
$s_t = \{\mu_1(u), \mu_2 u(), \dots, \mu_t(u)\}, \quad s'_t = \{\mu'_1(u), \mu'_2(u), \dots, \mu'_t(u)\}$,
$\rho(f,g)$ *- некоторая метрика в* L.

Тогда

$$d(s_t, s'_t) = \sum_{j=1}^{t} \rho(\mu_j, \mu'_j) \tag{4.2}$$

есть метрика в $G_t(L)$.

Доказательство. Для доказательства леммы необходимо проверить выполнение аксиом расстояния (с. 19).

Так как $\rho(\mu_j, \mu'_j)$ - метрика, то выполнение первых двух аксиом для (4.2) очевидно. Проверим выполнение аксиом 3, 4.

3. $d(s_t, s'_t) = 0 \Leftrightarrow \forall j(1 \le j \le t) \quad \rho(\mu_j, \mu'_j) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall j(1 \le j \le t) \quad \mu_j = \mu'_j \Leftrightarrow s_t = s'_t$.

4. $d(s_t, s'_t) = \sum\limits_{j=1}^{t} \rho(\mu_j, \mu'_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{t} [\rho(\mu_j, \mu''_j) + \rho(\mu''_j, \mu'_j)] =$

$= \sum\limits_{j=1}^{t} \rho(\mu_j, \mu'_j) + \sum\limits_{j=1}^{t} \rho(\mu'_j, \mu''_j) = d(s_t, s''_t) + d(s''_t, s'_t).$

Лемма доказана.

Для формулировки аксиом необходимо определить совокупность множеств, базирующуюся на данной совокупности нечетких множеств и являющихся "четкими". Это множество характеристических функций, определяемых следующим образом.

Пусть $s_t \in G_t(L)$ определена на U и включает функции принадлежности $\mu_1(u), \mu_2(u), \ldots, \mu_t(u)$. Построим совокупность характеристических функций $\tilde{s}_t$, состоящую из функций $h_1(u), h_2(u), \ldots,$
$h_t(u)$, где

$$h_i(u) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \max_{1 \leq j \leq t} \mu_j(u) = \mu_i(u) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{4.3}$$

Будем называть $\tilde{s}_t$ ближайшей совокупностью характеристических функций для $s_t \in G_t(L)$.

Под степенью нечеткости $s_t \in G_t(L)$ будем понимать значение функционала $\xi(s_t)$, определенного на множестве функций принадлежности s_t и удовлетворяющего следующим аксиомам:

$A1$. $0 \leq \xi(s_t) \leq 1 \quad \forall s_t \in G_t(L)$.

$A2$. $\xi(s_t) = 0 \Leftrightarrow \forall u \in U \; \exists j (1 \leq j \leq t) :$
$\mu_j(u) = 1, \; \mu_i(u) = 0 \; \forall i \neq j.$

$A3$. $\xi(s_t) = 1 \Leftrightarrow \forall u \in U \; \exists i_1, i_2 (1 \leq i_1, i_2 \leq t) :$
$\mu_{i_1}(u) = \mu_{i_2}(u) = \max_{1 \leq j \leq t} \mu_j(u)$.

$A4$. Пусть s_t и $s'_{t'}$ определены на универсальных множествах U и U' соответственно; t и t' могут быть равны или не равны друг другу. Тогда
$\xi(s_t) \leq \xi(s'_{t'})$, если $\rho(s_t, \tilde{s}_t) \leq \rho(s'_{t'}, \tilde{s_{t'}}')$, где $\rho(.,.)$ - некоторая метрика в $G_t(L)$.

Аксиома $A1$ определяет границы изменения степени нечеткости.

Аксиомы $A2$ и $A3$ описывают совокупности нечетких множеств, на которых $\xi(s_t)$ достигает максимальные и минимальные значения, то есть максимально "четкие" и максимально "нечеткие" совокупности нечетких множеств соответственно.

Аксиома $A4$ определяет для каждой пары совокупностей нечетких множеств правило сравнения степени их нечеткости. Ее можно интерпретировать следующим образом: чем ближе некоторая совокупность нечетких множеств к своей ближайшей совокупности характеристических функций, тем меньше степень ее нечеткости.

Существуют ли функционалы, удовлетворяющие сформулированным аксиомам? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 4 (Теорема существования). *Пусть $s_t \in G_t(L)$. Тогда функционал*

$$\xi(s_t) = \frac{1}{|U|} \int_U f(\mu_{i_1^*}(u) - \mu_{i_2^*}(u)) du, \tag{4.4}$$

где

$$\mu_{i_1^*}(u) = \max_{1\le j\le t} \mu_j(u), \quad \mu_{i_2^*}(u) = \max_{1\le j\le t;\, j\ne i_1^*} \mu_j(u), \tag{4.5}$$

f удовлетворяет следующим требованиям:
$F1: \ f(0)=1, \quad f(1)=0$;
$F2: \ f$ *убывает,*
- является степенью нечеткости s_t, то есть удовлетворяет аксиомам $A1-A4$.

Доказательство 1. Выполнение аксиомы $A1$ очевидно.
2. Обозначим через $\eta(s_t,u)$ подынтегральную функцию в (4.4) В этом случае:

$$\begin{aligned}
\xi(s_t)=0 \ &\Leftrightarrow \forall u\in U \ \eta(s_t,u)=0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \forall u\in U \ \mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)=1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \forall u\in U \exists j(1\le j\le t): \ \mu_j(u)=1, \ \mu_i(u)=0 \\
&\qquad\qquad \forall i\ne j.
\end{aligned}$$

3. Аналогично пункту 2,

$$\begin{aligned}
\xi(s_t)=1 \ &\Leftrightarrow \forall u\in U \ \eta(s_t,u)=1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \forall u\in U \ \mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)=0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \forall u\in U \ \exists i_1,i_2(1\le i_1,i_2\le t): \\
&\quad \mu_{i_1}(u)=\mu_{i_2}(u)=\max\nolimits_{1\le j\le t}\mu_j(u).
\end{aligned}$$

4. Рассмотрим произвольные $s_t, \ s'_{t'}\in G_t(L)$.

$$\begin{aligned}
\xi(s_t)\le\xi(s'_{t'}) \ \ \Leftrightarrow & \ \ \tfrac{1}{|U^1|}\textstyle\int_{U^1} f(\mu^1_{i_1^*}(u^1)-\mu^1_{i_2^*}(u^1))du^1 \le \\
\le & \ \ \tfrac{1}{|U^2|}\textstyle\int_{U^2} f(\mu^2_{i_1^*}(u^2)-\mu^2_{i_2^*}(u^2))du^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \ \ \tfrac{1}{|U^1|}\textstyle\int_{U^1} (\mu^1_{i_1^*}(u^1)-\mu^1_{i_2^*}(u^1))du^1 \ge \\
\ge & \ \ \tfrac{1}{|U^2|}\textstyle\int U^2 (\mu^2_{i_1^*}(u^2)-\mu^2_{i_2^*}(u^2))du^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \ \ \tfrac{1}{|U^1|}\textstyle\int_{U^1} (1-(\mu^1_{i_1^*}(u^1)-\mu^1_{i_2^*}(u^1)))du^1 \le \\
\le & \ \ \tfrac{1}{|U^2|}\textstyle\int_{U^2} (1-(\mu^2_{i_1^*}(u^2)-\mu^2_{i_2^*}(u^2)))du^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \ \ \tfrac{1}{|U^1|}\textstyle\int_{U^1} \Big[(1-\mu^1_{i_1^*}(u^1))+ \\
& \qquad\qquad +(\mu^1_{i_2^*}(u^1)-0)\Big]du^1 \le \\
\le & \ \ \tfrac{1}{|U^2|}\textstyle\int_{U^2} \Big[(1-\mu^2_{i_1^*}(u^2))+ \\
& \qquad\qquad +(\mu^2_{i_2^*}(u^2)-0)\Big]du^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \ \ \tfrac{1}{|U^1|}\textstyle\int_{U^1} \Big[(h^1_{i_1^*}(u^1)-\mu^1_{i_1^*}(u^1))+ \\
& \qquad\qquad +(\mu^1_{i_2^*}(u^1)-h^1_{i_2^*}(u^1))\Big]du^1 \le \\
\le & \ \ \tfrac{1}{|U^2|}\textstyle\int_{U^2} \Big[(h^2_{i_1^*}(u^2)-\mu^2_{i_1^*}(u^2))+ \\
& \qquad\qquad +(\mu^2_{i_2^*}(u^2)-h^2_{i_2^*}(u^2))\Big]du^2.
\end{aligned}$$

В данных преобразованиях вторая эквивалентность является следствием определения функции f (требование $F2$), третья эквивалентность - следствие неравенства $0\le\mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)\le 1 \quad \forall u\in U$, замена 1 и 0 на h с соответствующими индексами (последняя эквивалентность) - следствие определений h (4.3) и $\mu_{i_1^*}(u),\ \mu_{i_2^*}(u)$ (4.5). Последнее неравенство мы можем переписать следующим образом.

$$d(h^1_{i_1^*},\ \mu^1_{i_1^*}) + d(h^1_{i_2^*},\ \mu^1_{i_2^*}) \le d(h^2_{i_1^*},\ \mu^2_{i_1^*}) + d(h^2_{i_2^*},\ \mu^2_{i_2^*}),$$

где $d(h,\mu) = \int_U |h(u) - \mu(u)| du$ мера в L.

Последнее неравенство есть расстояние между s_t и $\tilde{s}_t$ (Лемма 1).

Итак, при выполнении условий теоремы существует мера, для которой $\xi(s_t) \le \xi(s'_{t'})$, если $\rho(s_t, \tilde{s}_t) \le \rho(s'_{t'}, \widetilde{s'_{t'}})$.

Теорема существования полностью доказана.

Достаточно очевидно, что существует только одна линейная функция, удовлетворяющая $F1,\ F2$. Это функция

$$f(x) = 1 - x.$$

Можно также описать подмножество полиномов второй степени, удовлетворяющих $F1,\ F2$. Это параметрическое семейство функций

$$f_a(x) = ax^2 - (1 + a)x + 1.$$

Подмножества функций других типов (логарифмических, тригонометрических и др.), удовлетворяющих $F1,\ F2$ могут быть описаны аналогичным образом. Подставляя эти функции в формулу (4.4), мы получаем функционалы, удовлетворяющие $A1 - A4$, то есть степени нечеткости.

Какие из этих классов функционалов "лучше"? Это довольно сложный вопрос, ответ на который зависит от конкретного приложения. Мы не будем углубляться в конкретные проблемы, а изучим некоторые общие свойства простейшего из таких функционалов - функционала из класса линейных функций f.

4.4 Некоторые свойства степени нечеткости ПОСП

Мы приведем свойства степени нечеткости для линейной функции f:

$$\xi(s_t) = \frac{1}{|U|} \int_U (1 - (\mu_{i_1^*}(u) - \mu_{i_2^*}(u)))du, \tag{4.6}$$

где $\mu_{i_1^*}(u),\ \mu_{i_2^*}(u)$ описываются (4.5).

Функционал $\xi(s_t)$ может быть интерпретирован как средняя степень трудностей описания человеком реальных объектов (ситуаций) в рамках соответствующего семантического пространства.

Интерпретация. Рассмотрим процесс описания человеком реальных объектов. Мы не имеем никакой неопределенности при лингвистическом описании объекта, имеющего "физическое" значение признака u_1 (Рис. 4.3). Мы присвоим ему лингвистическое значение a_1 без сомнений и колебаний.

Мы можем повторить данные рассуждения для объекта, имеющего "физическое" значение признака u_5. Мы без колебаний выбираем термин a_2 для его лингвистического описания без сомнений. Мы начинаем испытывать трудности при выборе

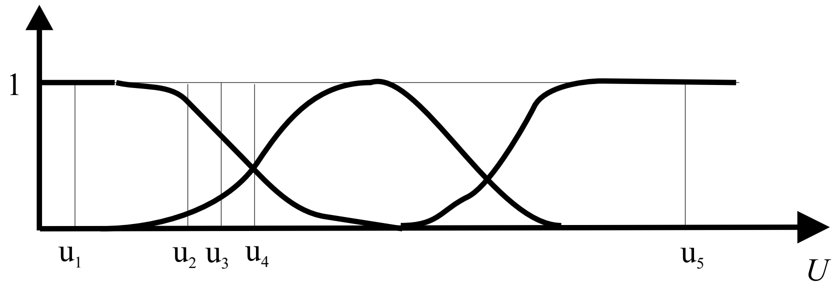

Рис. 4.3:

лингвистического значения для объекта, имеющего "физическое" значение признака u_2. Эти трудности возрастают (u_3) и достигают максимального значения при описании объектов, имеющих "физическое" значение признака u_4: для таких объектов оба лингвистических значения одинаково подходят.

Если мы рассмотрим значения подынтегральной функции

$$\eta(s_t, u) = 1 - (\mu_{i_1^*}(u) - \mu_{i_2^*}(u))$$

в этих точках, мы можем увидеть, что

$$0 = \eta(s_t, u_5) = \eta(s_t, u_1) < \eta(s_t, u_2) < \eta(s_t, u_3) < \eta(s_t, u_4) = 1.$$

Таким образом, значение интеграла (4.6) мы действительно можем интерпретировать как среднюю степень трудностей описания человеком реальных объектов (ситуаций) в рамках соответствующего ПОСП.

Рассмотрим некоторые свойства функционала (4.6). Для этого рассмотрим следующие подмножества L:

$\overline{L}$ - множество кусочно - линейных функций из L, которые являются линейными на множестве неопределенности

$$\overline{U} = \{u \in U :\ \forall j\ (1 \le j \le t)\ 0 < \mu_j(u) < 1\},$$

$\widehat{L}$ - множество функций из L, являющихся кусочно-линейными на U (включая $\overline{U}$).

Теорема 5 *Пусть* $s_t \in G_t(\overline{L})$. *Тогда* $\xi(s_t) = \frac{d}{2|U|}$, *где* $d = |\overline{U}|$.

Доказательство. Рассмотрим простейший случай $t = 2$ (Рис. 4.4).

Зафиксируем две точки:

$\overline{u}_{2L}$ - левая ненулевая граница $\mu_{a_2}(u)$ и

$\overline{u}_{1R}$ - правая ненулевая граница $\mu_{a_1}(u)$.

Значение интеграла (4.6) не равно нулю только на отрезке $[\overline{u}_{2L},\ \overline{u}_{1R}]$. Таким образом,

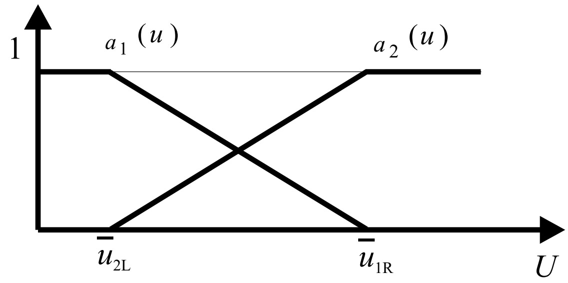

Рис. 4.4:

$$\xi(s_2) = \frac{1}{|U|}\int_U (1-(\mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)))du = \\ = \frac{1}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}}^{\overline{u}_{1R}} (1-(\mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)))du. \quad (4.7)$$

Используя простейшие формулы элементарной геометрии, мы можем написать:

$$\mu_{a_1}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \le \overline{u}_{2L} \\ \frac{1}{d}(\overline{u}_{1R}-u), & \text{если } \overline{u}_{2L} \le u \le \overline{u}_{1R} \\ 0, & \text{если } u \ge \overline{u}_{1R} \end{cases}, \quad (4.8)$$

$$\mu_{a_2}(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \le \overline{u}_{2L} \\ \frac{1}{d}(u-\overline{u}_{2L}), & \text{если } \overline{u}_{2L} \le u \le \overline{u}_{1R} \\ 1, & \text{если } u \ge \overline{u}_{1R} \end{cases}, \quad (4.9)$$

где $d = \overline{u}_{1R} - \overline{u}_{2L}$.

Подставляя (4.8), (4.9) в (4.6) и вспоминая (4.5), мы можем написать:

$$\xi(s_2) = \frac{1}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}}^{\overline{u}_{1R}}(1-(\mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)))du = \\ = \frac{1}{|U|}\Big[\int_{\overline{u}_{2L}}^{\frac{1}{2}(\overline{u}_{1R}+\overline{u}_{2L})}(1-(\mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)))du + \\ + \int_{\frac{1}{2}(\overline{u}_{1R}+\overline{u}_{2L})}^{\overline{u}_{1R}}(1-(\mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)))du\Big] = \\ = \frac{1}{2}|U|\int_{\overline{u}_{2L}}^{\frac{1}{2}(\overline{u}_{1R}+\overline{u}_{2L})}(\overline{u}_{1R}+\overline{u}_{2L}-2u)du = \frac{\overline{u}_{1R}+\overline{u}_{2L}}{2|U|} = \\ = \frac{d}{2|U|}.$$

Для доказательства теоремы в общем случае $t > 2$ мы должны повторить наши рассуждения для всех областей неопределенности $[\overline{u}_{j,L}, \overline{u}_{j-1,R}]$ $(2 \le j \le t)$.

Теорема доказана.

Теорема 6 *Пусть $s_t \in G_t(\widehat{L})$. Тогда*

$$\xi(s_t) = c\frac{d}{|U|}, \quad (4.10)$$

где $d = |\overline{U}|, c < 1,\ c = Const.$

Доказательство теоремы достаточно очевидно.

Так как любая $s_t \in G_t(L)$ может быть со сколь угодно большой точностью аппроксимирована совокупностью нечетких множеств из $s_t \in G_t(\widehat{L})$, то соотношение (4.10) справедливо для всех $s_t \in G_t(L)$.

Пусть g некоторая взаимно-однозначная функция, определенная на U. Эта функция индуцирует преобразование некоторой $s_t \in G_t(L)$, определенной на универсальном множестве U в $g(s_t)$, определенной на универсальном множестве U', где

$$U' = g(U) = \{u' : \ u' = g(u), \ u \in U\}.$$

Это преобразование можно определить следующим образом:
$g(s_t)$ есть множество функций принадлежности $\{\mu_1'(u'), ..., \mu_t'(u')\}$, где

$$\mu_j'(u') = \mu_j'(g(u)) = \mu_j(g^{-1}(u')) = \mu_j(u), \mu_j(u) \in s_t, \ 1 \le j \le t.$$

Следующий пример иллюстрирует данное определение.

Пример 20 *Пусть $s_t \in G_t(L)$, U - универсум s_t и g - растяжение (сжатие) универсума U. В этом случае $g(s_t)$ есть совокупность функций принадлежности, полученная из s_t таким же растяжением (сжатием).*

Теорема 7 *Пусть $s_t \in G_t(L)$, U - универсум s_t, g - некоторая линейная взаимно-однозначная функция на U и $\xi(s_t) \neq 0$. Тогда $\xi(s_t) = \xi(g(s_t))$.*

Доказательство. Рассмотрим простейший случай $t = 2$ (смотри доказательство теоремы 5). Если $s_2 \in G_2(L)$, то, в силу ортогональности,

$$\mu_{a_1}(u) = 1 - \mu_{a_2}(u) \quad \forall u \in U$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\xi(s_2) &= \tfrac{1}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}}^{\overline{u}_{1R}}(1-(\mu_{i_1^*}(u)-\mu_{i_2^*}(u)))du = \\
&= \tfrac{1}{|U|}\Big[\int_{\overline{u}_{2L}}^{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}(1-(\mu_{a_1}(u)-\mu_{a_2}(u)))du + \\
&\quad + \int_{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}^{\overline{u}_{1R}}(1-(\mu_{a_2}(u)-\mu_{a_1}(u)))du\Big] = \\
&= \tfrac{2}{|U|}\Big[\int_{\overline{u}_{2L}}^{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}(1-((1-\mu_{a_2}(u))-\mu_{a_2}(u)))du + \\
&\quad + \int_{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}^{\overline{u}_{1R}}(1-((1-\mu_{a_1}(u))-\mu_{a_1}(u)))du\Big] = \\
&= \tfrac{2}{|U|}\Big[\int_{\overline{u}_{2L}}^{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}\mu_{a_2}(u)du + \int_{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}^{\overline{u}_{1R}}\mu_{a_1}(u)du\Big]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Повторяя данные рассуждения для $s_t' = g(s_t)$, мы можем написать:

$$\xi(s_2') = \frac{2}{|g(U)|}\left[\int_{g(\overline{u}_{2L})}^{g(\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2}))}\mu_{a_2}'(u')du' + \int_{g(\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2}))}^{g(\overline{u}_{1R})}\mu_{a_1}'(u')du'\right] \tag{4.12}$$

Производя замену переменных $u' = g(u)$, мы можем переписать (4.12) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi(s_2') &= \tfrac{2}{|g(U)|}\Big[\int_{g(\overline{u}_{2L})}^{g(\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2}))} \mu'_{a_2}(g(u))dg(u) + \\
&\qquad + \int_{g(\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2}))}^{g(\overline{u}_{1R})} \mu'_{a_1}(g(u))dg(u)\Big] = \\
&= \tfrac{2}{|g(U)|}\Big[\int_{\overline{u}_{2L}}^{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})} \mu_{a_2}(u)g'(u)du + \\
&\qquad + \int_{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}^{\overline{u}_{1R}} \mu_{a_1}(u)g'(u)du\Big]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Последнее соотношение в (4.13) является следствием определения $g(s_t)$.

Равенство $\xi(s_2) = \xi(g(s_2))$ эквивалентно равенству

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{|U|}\Big[\int_{\overline{u}_{2L}}^{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})} \mu_{a_2}(u)du + \int_{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}^{\overline{u}_{1R}} \mu_{a_1}(u)du\Big] = \\
&= \tfrac{2}{|g(U)|}\Big[\int_{\overline{u}_{2L}}^{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})} \mu_{a_2}(u)g'(u)du + \int_{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}^{\overline{u}_{1R}} \mu_{a_1}(u)g'(u)du\Big]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Равенство (4.14) мы можем переписать как

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{u}_{2L}}^{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})} \mu_{a_2}(u)\left(\tfrac{1}{|U|} - \tfrac{g'(u)}{|g(U)|}\right)du + \\
&\qquad + \int_{\mu_{a_1}^{-1}(\frac{1}{2})}^{\overline{u}_{1R}} \mu_{a_1}(u)\left(\tfrac{1}{|U|} - \tfrac{g'(u)}{|g(U)|}\right)du = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Если $g(u)$ - линейная функция, то $g(u) = ku + a$, где k, a некоторые константы. Значение $g'(u) = k = \frac{g(u_2)-g(u_1)}{u_2-u_1} \quad \forall u_2,\ u_1 \in U$, и, в частности, $g'(u) = \frac{|g(U)|}{|U|}$. Используя последнее равенство, мы можем написать:

$$\frac{1}{|U|} - \frac{g'(u)}{|g(U)|} = 0.$$

Таким образом, (4.15) справедливо.

Для доказательства теоремы в общем случае $t > 2$ мы должны повторить наши рассуждения для всех областей неопределенности $[\overline{u}_{j,L},\ \overline{u}_{j-1,R}] \quad (2 \le j \le t)$.

Теорема доказана.

Это свойство означает, что человек описывает разнотипные объекты в рамках некоторого семантического пространства с равными трудностями, если физические параметры объектов одного типа можно получить из параметров объектов другого типа некоторым линейным преобразованием. Например, используя множество термов {высокий, средний, низкий} мы описываем людей, деревья, здания с одинаковыми трудностями; используя множество значений {очень близко, близко, не близко, далеко} мы описываем расстояния между молекулами, улицами в городе, городами на карте и т.п. с одинаковыми трудностями.

Степень нечеткости одного множества, индуцированная $\xi(s_t)$ может быть определена как степень нечеткости тривиальной совокупности нечетких множеств, определенной одним множеством $\mu(u)$:

$$\xi(\mu) = \frac{1}{|U|}\int_U (1 - |2\mu(u) - 1|)du. \qquad (4.16)$$

Не трудно доказать, что (4.16) обладает всеми свойствами степени нечеткости множества, изложенными в 1.5.4.

Методика выбора оптимального множества значений качественного признака

Вернемся к примеру 19 и проблеме 1. На основе свойств степени нечеткости ПОСП (раздел 4.4) и ее интерпретации (с. 60), мы можем сформулировать следующую методику выбора оптимально множества значений качественных признаков.

1. Формируются все возможные (все "разумные") множества значений признака.
2. Каждое множество значений признака представляется в виде полного ортогонального семантического пространства.
3. Для каждого множества значений вычисляется степень нечеткости ПОСП.
4. В качестве оптимального множества значений как по критерию 1, так и по критерию 2, выбирается то множество степень нечеткости которого минимальна.

4.5 Устойчивость степени нечеткости ПОСП

Одним из ограничений методики выбора оптимального множества значений качественных признаков (раздел 4.4), существенно используемых при ее анализе, является предположение об одинаковости функций принадлежности используемых лингвистических понятий. Интуитивно ясно, что функции принадлежности у всех людей не могут быть полностью одинаковыми. Данный тезис можно проиллюстрировать следующими примерами.

Если попросить оценить возраст юношу и пожилого человека, то, скорее всего, их оценки будут различаться: для молодого человека 50 лет - это старость, для пожилого - зрелый возраст. То же самое может наблюдаться при оценке роста низким и высоким человеком: функции принадлежности соответствующих лингвистических понятий у первого будут сдвинуты влево, у второго - вправо относительно друг друга. Подобные ситуации давно были замечены и даже послужили основой сюжета ряда детективов.

Более сложное взаимодействие между семантикой одинаковых терминов может наблюдаться у людей разных национальностей (проживающих в различных геоклиматических зонах) в силу принципа лингвистической дополнительности - одного из принципов психолингвистики [8]. Так, например, жители крайнего севера (эскимосы, чукчи) различают несколько оттенков снега, соответствующих его состоянию, финны имеют несколько названий для синего цвета.

Для отражения перечисленных факторов будем считать, что функции принадлежностей источника информации и пользователя не совпадают, а могут находиться в некоторой полосе ширины δ, то есть заданы с некоторой "точностью" δ (рис. 4.5).

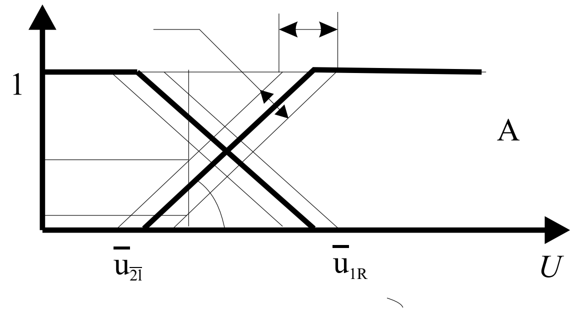

Рис. 4.5:

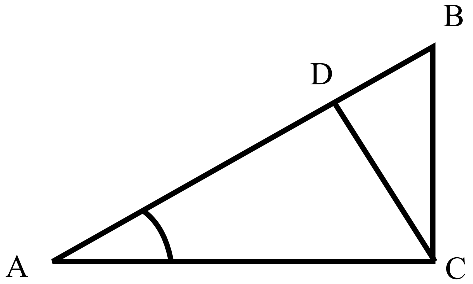

Рис. 4.6:

Выразим основные параметры (δ_1 и δ_2), необходимые для анализа модели, как функции от δ. Для этого воспользуемся элементарными соотношениями из тригонометрии.

Обозначим через α угол наклона $\mu_{a_2}(u)$ в точке $\overline{u}_{2L}$ (рис. 4.5). Тогда $\tan\alpha = \frac{1}{d}$, где $d = \overline{u}_{1R} - \overline{u}_{2L}$. Рассмотрим более подробно треугольник ABC, где $\angle BAC = \alpha$, $|BC| = \frac{\delta_2}{2}$, $|CD| = \frac{\delta}{2}$, $|AC| = \frac{\delta_1}{2}$ (рис. 4.6).

Из $\triangle ABC$ следует, что $\tan\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$.

Таким образом, $\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{1}{d}$, и, следовательно,

$$\delta_1 = \delta_2 d. \tag{4.17}$$

Выразим δ_2 через δ и d. С помощью простейших тригонометрических соотношений из $\triangle CDB$ и $\triangle ADC$, получаем, что $\delta^2(1+d^2) = \delta_2^2 d^2$.

Из последнего равенства получаем:

$$\delta_2^2 = \frac{\delta^2}{d^2}(1+d^2)$$

или

$$\delta_2 = \frac{\delta}{d}\sqrt{1+d^2}. \tag{4.18}$$

Вспоминая соотношение $\delta_1 = \delta_2 d$, получаем:

$$\delta_1 = \delta\sqrt{1+d^2}. \tag{4.19}$$

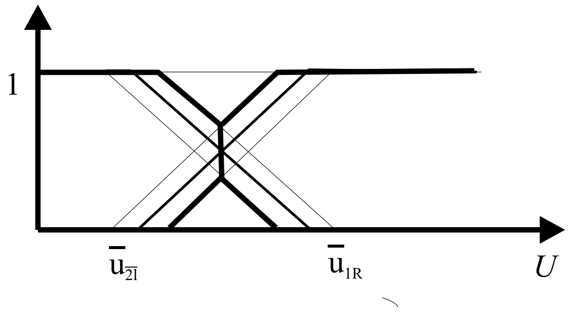

Рис. 4.7:

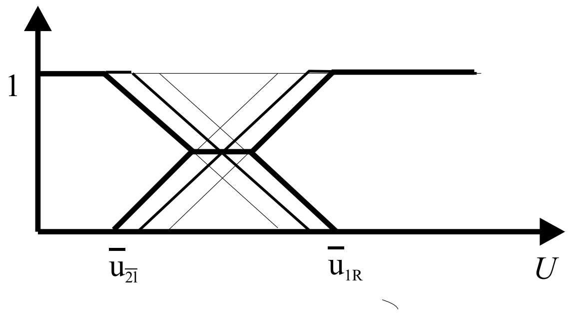

Рис. 4.8:

Имея выражения для δ_2 и δ_1 ((4.18) и (4.19) соответственно) можно оценить средние индивидуальные потери информации и шумы для описанной модели (будем называть ее δ - модель и обозначать $G_t^\delta(L)$), а также степень нечеткости соответствующего ПОСП.

Степень нечеткости в δ - модели

Построим обобщение формулы (4.6) для случая $\delta-$ модели. Для этого рассмотрим некоторую точку $u \in U$ (рис. 4.5). Достаточно очевидно, что что нижние и верхние оценки для степени нечеткости в точке $\underline{\xi}(s_t)$ и $\overline{\xi}(s_t)$ будут достигаться при функциях принадлежности, имеющих изображенный на рис. 4.7 и 4.8 вид соответственно (на рис. 4.7 изображена наиболее близкая к характеристической функция принадлежности; на рис. 4.8 - наиболее близкая к функции $\mu(u) = 0.5 \forall u \in U$ функция принадлежности из данной области).

Для формализации записи таких функций введем следующие величины:

$$q = \{R, L\}, \tag{4.20}$$

$$\overline{q} = \begin{cases} R, & \text{если } q = L, \\ L, & \text{если } q = R, \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\widetilde{U} = \cup_{j=2}^{t} \left[\frac{\overline{u}_{jL} + \overline{u}_{j-1,R}}{2} - \frac{\delta_1}{2}, \frac{\overline{u}_{jL} + \overline{u}_{j-1,R}}{2} + \frac{\delta_1}{2} \right] \tag{4.22}$$

Тогда

$$\underline{\eta}(s_t, u) = 1 - \left(\mu_{i_1^*}^{q}(u) - \mu_{i_2^*}^{q}(u) \right), \tag{4.23}$$

где

$$\mu_{i_1^*}^{q}(u) = \max_{1 \le j \le t} \left\{ \mu_j^R(u), \mu_j^L(u) \right\}, \tag{4.24}$$

$$q = \begin{cases} R, & \mu_{i_1^*}^R(u) \ge \mu_{i_1^*}^L(u) \\ L, & \mu_{i_1^*}^L(u) > \mu_{i_1^*}^R(u) \end{cases}$$

$$\mu_{i_2^*}^{q}(u) = \max_{1 \le j \le t_{j \ne i_1^*}} \mu_j^q(u).$$

$$\overline{\eta}(s_t, u) = \begin{cases} 1 - \left(\mu_{i_1^*}^{\overline{q}}(u) - \mu_{i_2^*}^{\overline{q}}(u) \right), & u \in U \backslash \widetilde{U} \\ 0.5, & u \in \widetilde{U} \end{cases} \tag{4.25}$$

Аналогично (4.6) нижние и верхние оценки $\xi(s_t)$ имеют следующий вид:

$$\underline{\xi}(s_t) = \frac{1}{|U|} \int_U \underline{\eta}(s_t, u) du, \tag{4.26}$$

$$\overline{\xi}(s_t) = \frac{1}{|U|} \int_U \overline{\eta}(s_t, u) du. \tag{4.27}$$

Теорема 8 *Пусть* $s_2 \in G_2^{\delta}(\overline{L})$ *Тогда*

$$\underline{\xi}(s_2) = \frac{d\,(1 - \delta_2)^2}{2|U|}, \overline{\xi}(s_2) = \frac{d\,(1 + 2\delta_2)}{2|U|}.$$

Доказательство. Как видно из рис. 4.7 и формул (4.23), (4.24), можно представить $\underline{\xi}(s_2)$, аналогично доказательству теоремы 5, следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\underline{\xi}(s_2) &= \frac{1}{|U|}\int_U \underline{\eta}(s_2,u)du = \frac{1}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}+\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{1R}-\frac{\delta_1}{2}} \underline{\eta}(s_2,u)du = \\
&= \frac{2}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}+\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{2L}+\frac{d}{2}} \Bigg(1-\Bigg(\frac{1}{d}\left[\left(\overline{u}_{1R}+\frac{\delta_1}{2}\right)-u\right]- \\
&\qquad\qquad -\frac{1}{d}\left[u-\left(\overline{u}_{2L}+\frac{\delta_1}{2}\right)\right]\Bigg)\Bigg)du = \\
&= \frac{2}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}+\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{2L}+\frac{d}{2}} du + \frac{4}{d|U|}\int_{\overline{u}_{2L}+\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{2L}+\frac{d}{2}} \left(u-\overline{u}_{2L}\right)du - \\
&\qquad\qquad -\frac{2}{d|U|}\int_{\overline{u}_{2L}+\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{2L}+\frac{d}{2}} \left(d-\delta_1\right)du = \\
&= \frac{2}{d|U|}\left[\left(\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}\right)+2\int_{\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{d}{2}} zdz-\left(d+\delta_1\right)\left(\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{2}{d|U|}\left[\left(\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}\right)\left(d-d-\delta_1\right)+2\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4}-\frac{\delta_1^2}{4}\right)\right] = \\
&= \frac{2}{d|U|}\left[\left(\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}\right)\left(-\delta_1\right)+\left(\frac{d}{2}+\frac{\delta_1}{2}\right)\left(\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{2}{d|U|}\left[\left(\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}\right)\left(\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}\right)\right] = \frac{2}{d|U|}\frac{\left(d-\delta_1\right)^2}{4} = \\
&= \frac{d\left(1-\delta_2\right)^2}{2|U|} \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

При выводе (4.28) использовалась замена переменных $z = u - \underline{u}_{2L}$ и соотношение $\delta_1 = d\delta_2$ (4.17).

Аналогично вычислению $\underline{\xi}(s_2)$, представим $\overline{\xi}(s_2)$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\overline{\xi}(s_2) &= \frac{1}{|U|}\int_U \overline{\eta}(s_2,u)du = \frac{1}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}-\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{1R}+\frac{\delta_1}{2}} \overline{\eta}(s_2,u)du = \\
&= \frac{2}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}-\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{\overline{u}_{2L}+\overline{u}_{1R}}{2}} \overline{\eta}(s_2,u)du = \\
&= \frac{2}{|U|}\int_{\overline{u}_{2L}-\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{\overline{u}_{2L}+\overline{u}_{1R}}{2}-\frac{\delta_1}{2}} \left(1-\left(\frac{1}{d}\left[\left(\overline{u}_{1R}-\frac{\delta_1}{2}\right)-u\right]-\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.-\frac{1}{d}\left[u-\left(\overline{u}_{2L}-\frac{\delta_1}{2}\right)\right]\right)\right)du+ \\
&\qquad +\frac{2}{|U|}\int_{\frac{\overline{u}_{2L}+\overline{u}_{1R}}{2}-\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{\overline{u}_{2L}+\overline{u}_{1R}}{2}} du = \\
&= \frac{2}{d|U|}\left[\int_{\overline{u}_{2L}-\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{2L}+\frac{d}{2}+\frac{\delta_1}{2}} ddu + \int_{\overline{u}_{2L}-\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{2L}+\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}} 2\left(u-\overline{u}_{2L}\right)du - \right. \\
&\qquad \left. -\int_{\overline{u}_{2L}-\frac{\delta_1}{2}}^{\overline{u}_{2L}+\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}} \left(d-\delta_1\right)du\right] + \frac{2}{|U|}\frac{\delta_1}{2} = \\
&= \frac{2}{d|U|}\left[d\frac{d}{2}+2\int_{-\frac{\delta_1}{2}}^{\frac{d}{2}-\frac{\delta_1}{2}} zdz - \left(d-\delta_1\right)\frac{d}{2}\right] + \frac{\delta_1}{|U|} = \\
&= \frac{2}{d|U|}\left[\frac{d}{2}\left(d-d-\delta_1\right)+\frac{d}{2}\left(\frac{d}{2}-\delta_1\right)\right] + \frac{\delta_1}{|U|} = \\
&= \frac{d}{2|U|}+\frac{\delta_1}{|U|} = \frac{d}{2|U|}+\frac{d\delta_2}{|U|} = \frac{d}{2|U|}\left(1+2\delta_2\right) \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

При выводе (4.29) использовалась замена переменных и соотношение $\delta_1 = d\delta_2$ (4.17).

Теорема доказана.

Терема 8 довольно легко обобщается на случай более двух значений признака.

Теорема 9 *Пусть* $s_t \in G_t^{\delta}(\overline{L})$.

$$\underline{\xi}(s_t) = \frac{D\left(1-\delta_2\right)^2}{2|U|},$$

$$\overline{\xi}(s_t) = \frac{D\left(1+2\delta_2\right)}{2|U|},$$

где $D = \sum_{j=1}^{t-1} d_{j,j+1}$, $d_{j,j+1} = \overline{u}_{jR} - \overline{u}_{j+1,L}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5 с учетом теоремы 8.

Сравнивая утверждения теорем 5 и 9 мы можем утверждать, что малые значения δ не оказывают существенного влияния на значение степени нечеткости ПОСП, то есть степень нечеткость является устойчивой.

Это позволяет утверждать, что сформулированная нами методика выбора оптимального множества значений качественных признаков (раздел 4.4) может применяться в практических задачах. На основе теоремы 7 можно утверждать, что мы можем строить оптимальные множества значений качественных признаков в наиболее простых, ясных для эксперта ситуациях, а использовать их во всех случаях, получающихся из данного некоторым линейным преобразованием универсального множества.

В заключение отметим, что изложенные в данной главе результаты могут рассматриваться как первые наброски общей теории измерения степени нечеткости нечетких объектов. Эти исследования имеют не только теоретический интерес, но и позволяют решать практические задачи. Так, например, можно показать, что степень нечеткости связана с показателями качества поиска информации в нечетких (лингвистических) базах данных [44], [41]. Это означает, что мы имеем возможность на основе качества исходной информации "вычислить" предельно возможные показатели качества поиска информации в таких базах данных. Представляет интерес определение понятия степени нечеткости для других нечетких объектов. Определение степени нечеткости нечеткого отношения позволит, например, определять степень нечеткости систем логического вывода, изучить зависимость качества исходной информации и нечеткости вывода с одной стороны и качества работы экспертных систем, нечетких контроллеров и других прикладных нечетких систем с другой.

Литература

[1] Авдюнина Л.И., Черезова Н.Н. Лингвистический подход к решению задачи оперативного ситуационного анализа в организационных системах. it Управление при наличии расплывчатых категорий. Тезисы докладов IX научно - технического семинара. Баку, 1987, с. 17-19.

[2] Алиев Р.А., Шахназаров М.М., Гулько Д.Е. Экспертная система для решения задач планирования непрерывных производств с нечетким представлением знаний. it Управление при наличии расплывчатых категорий: Тезисы докладов IX научно - технического семинара. Баку, 1987, с. 43-46.

[3] Батыршин И.З. О мерах энтропии размытых множеств. *Исследование операций и аналитическое проектирование в технике. Труды Казанского авиационного институтата.* 1978, Вып. 1, с. 40 - 45.

[4] Беллман Р., Заде Л. Принятие решение в расплывчатых условиях. *Вопросы анализа и процедуры принятия решений.* Пер. с англ. М., Мир, 1976, с. 172 - 215.

[5] Берг А.И. *Кибернетика - наука об оптимальном управлении.* М., "Энергия", 1964.

[6] Блишун А.Ф. Моделирование процесса принятия решений в нечетких условиях на основе сходства понятий классов. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М., ВЦ АН СССР, 1982, 19 с.

[7] Борисов А.Н., Осис Я.Я. Методика оценки функций принадлежности элементов размытого множества. *Кибернетика и диагностика,* Рига, РПИ, 1970, с. 125-134.

[8] Брутян Г.А. *Гипотеза Сепира - Уорфа.* Ереван, 1968, 120 с.

[9] Величковчкий Б.М. it Современная когнитивная психология. М., Издательство МГУ, 1982, 336 с.

[10] Винер Н. *Творец и робот.* М., Прогресс, 1966, 255 с.

[11] Глушков В.М., Брановицкий В.И., Довгялло А.М. и др. *Человек и вычислительная техника.* Киев, Наукова думка, 1974, 294 с.

[12] Горелик А.Л., Гуревич И.Б., Скрипкин В.А. *Современное состояние проблемы распознавания.* М., Радио и связь, 1985, 98 с.

[13] Дюбуа , Прайд *1990 Теория возможностей: Приложения к представлению знаний в информатике.*

[14] Жуковин В.Е., Оганесян Н.А., Бурштейн Ф.В., Корелов Э.С. Об одном подходе к задачам принятия решений с позиций теории нечетких множеств. *Методы принятия решений в условиях неопределенности.* Рига: РПИ, 1980, с. 12-16.

[15] Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания и классификации. it Проблемы кибернетики. 1978, Вып. 33, с. 28 - 57.

[16] Заде Л.А. Основа нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. *Математика сегодня.* Под ред. Н.Н. Моисеева, М., Знание, 1974, с. 5 - 48.

[17] Заде Л.А. *Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приблизительных решений.* М., Мир, 1976, 165 с.

[18] Заде Л.А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе. *Классификация и кластер.* Под. ред. Дж. Вэн Райзин, М., Мир, 1980, с. 208 - 247.

[19] Ильин В.А., Поздняк Э.Г. *Основы математического анализа. Часть 1.* М. Наука, 1982, 616 с.

[20] Киквидзе З.А., Ткемаладзе Н.Т. Об одном способе взвешивания элементов нечеткого множества. *Сообщения АН ГССР,* 1979, т. 93, № 2, с. 317-320.

[21] Кофман А. *Введение в теорию нечетких множеств. Пер. с франц.* М., Радио и связь, 1982, 432 с.

[22] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. *Введение в теорию автоматов.* Москва, "Наука", 1985, 319 с.

[23] Кузьмин В.Б. *Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений.* М., ВНИИСИ, 1982, 63 с.

[24] Ларичев О.И., Петровский А.Б. Системы поддержки принятия решений: современное состояние и перспективы развития. *Итоги науки и техники. Серия "Техническая кибернетика".* Т. 21, М., ВИНИТИ, 1987, с. 18 - 35.

[25] Литвак Б.Г. *Экспертная информация: методы получения и анализа.* М., Радио и связь, 1982, 184 с.

[26] Ляпунов А.А. О некоторых общих вопросах кибернетики. *"Проблемы кибернетики",* вып.1, 1959.

[27] Миркин Б.Г. *Анализ качественных признаков и структур.* М., Наука, 1982, 286 с.

[28] *Модели принятия решений на основе лингвистической пе- ременной.* Под ред. А.Н. Борисова, А.В. Алексеева, О.А. Крумберга. Рига, Зинатне, 1982, 256 с.

[29] *Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта.* Под ред. Поспелова Д.А. М., Наука, 1986, 311 с.

[30] Орловский С.А. *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации.* М., Наука, 1981, 208 с.

[31] Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И. и др. Информационные и термодинамические аспекты качественной теории эволюционных моделей развивающихся динамических систем управления. *Итоги науки и техники. Серия "Техническая кибернетика".* Т.10., М., ВИНИТИ, 1978, с. 4 - 13.

[32] Попов Э.В. *Экспертные системы: решение неформальных задач в диалоге с ЭВМ.* М., Наука, 1987, 288 с.

[33] *Построение экспертных систем.* Под редакцией Ф. Хейес-Рот, Д. Уотерман, Д. Ленат. М., Мир, 1987, 441 с.

[34] *Представление знаний в человеко - машинных и робототехнических системах.* Том С, М., ВИНИТИ, 1984, 412 с.

[35] Пфанцгаль И. *Теория измерений.* Пер. с англ. М., "Мир", 1978

[36] Рубахин В.Ф. *Психологические основы обработки первичной информации.* Ленинград, Наука, 1974, 518 с.

[37] Руспини Э.Г. Последние достижения в нечетком кластераанализе. *Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения* Под редакцией Рональда Р. Ягера, М., Радио и связь, 1986, с 47 - 62.

[38] Рыжов А.П., Аверкин А.Н. Аксиоматическое определение степени нечеткости лингвистической шкалы и ее основные свойства. *II Всесоюзная конференция "Искусственный интеллект - 90" : Секционные и стендовые доклады.* Том 1, Минск, 1990, с. 162 - 165.

[39] Рыжов А.П. Об одном методе выбора множества шкальных значений нечетких лингвистических шкал. *Всесоюзная конференция по искусственному интеллекту. 21 - 25 ноября 1988 г.: Тезисы докладов.* Том I, Переславль-Залесский, 1988, с. 521 - 525.

[40] Рыжов А.П. Об одном методе оптимального описания объектов и ситуаций в интеллектуальных системах. *Создание и применение гибридных экспертных систем : Тезисы докладов Всесоюзной конференции, Ноябрь 1990 г.,* Рига, 1990, с. 62 - 64.

[41] Рыжов А.П. О степени нечеткости размытых характеристик. *Математическая кибернетика и ее приложения в биологии* Под редакцией Л.В.Крушинского, С.В.Яблонского, О.Б.Лупанова. М., Издательство МГУ, 1987, с. 60 - 77.

[42] Рыжов А.П. О степени нечеткости размытых характеристик. *Проблемы теоретической кибернетики: Тезисы докладов VII Всесоюзной конференции 18 сентября - 20 сентября 1985 г.* I Часть, Иркутск, 1985, с 53 - 55.

[43] Рыжов А.П. Степень нечеткости лингвистической шкалы и ее свойства. *Нечеткие системы поддержки принятия решений.* Под редакцией Аверкина А.Н. и др., Калинин, Издательство Калининского госуниверситета, 1988, с. 82 - 92 .

[44] Рыжов А.П. Оценка степени нечеткости и ее применение в системах искусственного интеллекта. *Интеллектуальные системы.* Т.1, Вып.1-4, Москва, МНЦ КИТ, 1996, с. 95 - 102.

[45] Садомов Ю.Б. О структурной организации и развитии диалоговых систем. *Человеко-машинные процедуры решения оперативных задач в АСУ.* М., ДНТП, 1974, с. 12 - 17.

[46] Санчес Э., Гуверне Ж., Бартолен Р., Вован Л. Лингвистический подход к нечеткой логике ВОЗ-классификации дисепотеинемии. *Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения.* Под редакцией Рональда Р. Ягера, М., Радио и связь, 1986, с. 173 - 182.

[47] Сметс Ф. Простейшие семантические операторы. *Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения.* Под редакцией Рональда Р. Ягера, М., Радио и связь, 1986, с. 144 -158.

[48] Танака Х., Цукияма Т., Асаи К. Модель нечеткой системы, основанная на логический структуре. *Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения.* Под редакцией Рональда Р. Ягера, М., Радио и связь, 1986, с. 63 - 75 .

[49] Тарасов В.Б., Перфильев С.А. О расстояниях между нечеткими множествами и их использовании в задаче принятия решений. *Управление при наличии расплывчатых категорий: Тезисы Y научно-технического семинара.* Пермь, 1982, с. 76 - 79.

[50] Ту Дж., Гонсалес Р. *Принципы распознавания образов.* Пер. с англ., М., Мир, 1978, 411 с.

[51] Тэрано Т., Асаи К., Сугэно М. *1993 Прикладные нечеткие системы.*

[52] Фу К. *Структурные методы в распознавании объектов.* Пер. с англ. М., "Мир", 1977.

[53] *Человек и ЭВМ (психологические проблемы автоматизации управления).* Под редакцией Тихомирова О.К., М., Экономика, 1973, 183 с.

[54] Шапиро Д.И. *Организационные системы управления: использование расплывчатых категорий.* М., Энергоатомиздат, 1983, 117 с.

[55] Шер А.П. Согласование нечетких экспертных оценок и функция принадлежности в методе размытых множеств. *Моделирование и исследование систем автоматического управления,* Владивосток, ДВНЦ АН СССР, 1978, с. 111-118.

[56] Шеридан Т.Б., Феррел У.Р. *Системы человек - машина: модели обработки информации, управления и принятия решений человеком - оператором.* Перевод с английского, М., Машиностроение, 1980, 520 с.

[57] *Этнопсихолингвистика.* Под редакцией Сорокина Ю.А., М., Наука, 1988, 92 с.

[58] Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики. *"Проблемы кибернетики",* вып.2, 1959.

[59] Bauer P., Klement E., Leikermoser A., Moser B. Approximation of Real Functions by Rule Bases. *Proceedings of the Fifth International Fuzzy Systems Association World Congress, Seoul, Korea, 1993* V. 1, p. 239-242.

[60] Bezdek J.S. Numerical taxonomy with fuzzy sets. *Journal of Mathematical Biology.* 1974, v.1, p. 57 - 71.

[61] Bosc P., Piver O. *1993 On the evaluation of fuzzy quantified queries in a databases managment system.*

[62] Braae M., Rutherford D.A. Selection of parametrs for fuzzy logic controller. *Fuzzy Sets and Systems,* 1979, V.2, p. 185-199.

[63] Bremermann H. Pattern recognition. *Systems theory in the social sciences* Ed. by H. Bossel at al. Stuttgart: Binkhauser Verlag, 1976, p. 116-159.

[64] Buckles B.P., Petry F.E. *Uncertainty models in information and database systems* Перевод: Модели неопределенности в информационных системах и базах данных. *Экспресс-информация. Информатика.* 1986, N 43, с. 11 - 14.

[65] Capocelli R., De Luca A. Fuzzy sets and decision theory. *Information and Control.* 1973, v.23, p. 43 - 50.

[66] Chang S.K. On the execution of fuzzy programs using finite state mashines. *IEEE Transactions on Computers.* 1972, v. 29, p. 15 - 21.

[67] Chu A.T.W., Kalaba R.E., Spingarn J. A comparison of two methods for determining the weights of belonging to fuzzy sets. *Journal of Optimization Theory and Applications,* 1979, V. 27, p. 531-538.

[68] De Luca A., Termini S. A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory. *Information and Control.* 1972, v.20, p. 301 - 312.

[69] De Luca A., Termini S. Measures of ambiguity in the analysis of complex systems. *Lectures Notes on Computer Sciences.* 1977, v. 53, p. 58 - 73.

[70] Di Nola A., Ventre A.G. Pointwice chois criteria determined by global properties. *BUSEFAL* 1983, v.12, p. 97 - 112.

[71] Dubois D., Prade H. Algorithmes de puls courts chemins pour traiter des données flous. *RAIRO. Recherche Operationelle*, 1978, v. 12, N 2, p. 213 - 227.

[72] Dubois D., Prade H. Decision-making under fuzziness. *Advances in fuzzy set theory and applications*, Ed. by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R.Jager, Amsterdam, North-Holland Publication Corporation, 1979, p. 279 - 302.

[73] Ebanks B.R. On measures of fuzziness and thier representation. *Journal of Mathematical Analysys and Applications.* 1983, v. 94, p. 63 - 76.

[74] Fukami S., Mizumoto M., Tanaka K. Some considerations on fuzzy conditional inferences. *Fuzzy Sets and Systems,* 1980, v. 4, p. 243 - 273.

[75] *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* Ed. by L.A. Zadeh et al. N.Y., Academic Press, 1975, 120 p.

[76] Goguen J.A. L-fuzzy sets. *Journal of Mahtematical Analysis and Applications.* 1967, v.18, p. 145 - 174.

[77] Ishikawa A., Mieno H. The fuzzy entropy concepts and its application. *Fuzzy Sets and Systems.* 1979, v.2, p. 38 - 52.

[78] R. Krause, M. Schroder. An application of equality relations to idle speed control. - In: Proceedings of the First European Congress on Intelligent Technologies. September 7-10, 1993. Aachen, Germany. - V.1. - pp.370-376.

[79] Mamdani E.H. Application of fuzzy ligic to approximate reasoning using linguistic systems. *IEEE Transaktion Computational,* 1977, v. 26, p. 1182 - 1191.

[80] Mansfield W.H., Fleischman R.M. *1993 A high perfomance fuzzy query processing system for relational databases.*

[81] Michinori, Nakata *1991 Integrity constraints in fuzzy databases*

[82] Mizumoto M., Fukami S., Tanaka K. Fuzzy conditional inferences and fuzzy inferences with fuzzy quantifiers. *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence,* Tokyo, 1979, p. 20 - 23.

[83] Mizumoto M., Tanaka K. Algebraic properties of fuzzy numbers. *Proceegings of IEEE International Conference on Cybernetisc and Society*, 1976, p. 559 - 563.

[84] Mizumoto M., Tanaka K. Some properties of fuzzy numbers. *Advances in fuzzy set theory and applications*, Amsterdam, North-Holland Publication Corporation, 1979, p. 153 - 164.

[85] Mizumoto M., Zimmermann H.J. Comparison of fuzzy reasoning methods. *Fuzzy Sets and Systems,* 1982, v.8, p. 253 - 283.

[86] Negoita C.V., Ralescu D.A. *Applications of fuzzy sets to systems analysis.* Basel, Birkhauser Verlag, 1975, 178 p.

[87] Osgood C.E., Suci G.L., Tannenbaum P.H. The measurement of meaning. *University of Illinois Press,* Urbana, 1957, p. 1-342.

[88] Pollatschek M.A. Hierarchical systems and fuzzy set theory. *Kybernetes.* 1977, v.6, p. 43 - 57.

[89] Prade H. Using fuzzy set theory in scheduling problem: a case study. *Fuzzy Sets and Systems*, 1979, v. 2, N 2, p. 153 - 165.

[90] Ragade R.K., Gupta M.M. Fuzzy sets theory: introduction. *Fuzzy Automata and Decision Processes* Ed. by Gupta M.M., Saridis G., Gaines B. Amsterdam: North-Holland, 1977, p. 105-131.

[91] Raymond C., Boverie S., Le Quellec J.M. Practical realisation of fuzzy controllers comparison with conventional methods. *Proceedings of the First European Congress on Intelligent Technologies. September 7-10, 1993. Aachen, Germany.* V.1. - pp.149-156.

[92] Riera T., Trillas E. From measures of fuzziness to booleanity control. *Fuzzy Information and Decision Processes.* Ed. by M.M. Gupta, E. Sanchez. Amsterdam, North-Holland, 1982, p. 67 - 82.

[93] Ryjov A.P. The axiomatic definition of a linguistic scale fuzziness degree, its major properties and applications. *North American Fuzzy Logic Proceeding Society (NAFIPS'92). Proceedings of a Conference held in PUERTO VALLARTA, MEXICO, December 15-17, 1992.* NASA Conference Publication 10112, Vol. 1, p. 21-29.

[94] Ryjov A. The measure of uncertainty of fuzzy set's collection: defenition, properties and applications. *Proceedings of ISUMA'93. The Second International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis. - University of Maryland, College Park, Maryland, USA, April, 25-28, 1993.* IEEE COMPUTER SOCIETY PRESS, p. 37-42.

[95] Ryjov A. The Information Retrieval in Fuzzy Data Bases. *Proceedings of the Fifth International Fuzzy Systems Association World Congress'93. - July 4-9, 1993, Seoul, Korea.* Vol.1, p. 477 - 480.

[96] Ryjov A. Fuzzy data bases: description of objects and retrieval of information. *Proceedings of the First European Congress on Intelligent Technologies. September 7-10, 1993. Aachen, Germany.* V.3, p.1557-1562.

[97] Ryjov A. The Concept of a Full Orthogonal Semantic Scope and the Measuring of Semantic Uncertainty. *Fifth International Conference Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Ba- sed Systems. - Paris, July 4-8, 1994.* p. 33-34.

[98] Ryjov A. and Loginov D. On the Choice of an Optimal Value-Set of Qualitative Attributes for Information Retrieval in Data Bases. *Fuzzy Logic and Intelligent Technologies in Nuclear Science - Proceedings of the 1st International FLINS*

Workshop Mol, Belgium, September 14-16, 1994. Edited by Da Ruan, Pierre D'hondt, Paul Govaerts, Etienne E. Kerre. World Scientific, p. 58-62.

[99] Ryjov A. The Practical Use of the Technique of Choosing an Optimal Value-Set of Qualitative Attributes: the Problem of Stability. *Fuzzy Logic and Intelligent Technologies in Nuclear Science - Proceedings of the 1st International FLINS Workshop Mol, Belgium, September 14-16, 1994.* Edited by Da Ruan, Pierre D'hondt, Paul Govaerts, Etienne E. Kerre. World Scientific, p. 63-66.

[100] Lyapin B. and Ryjov A. A Fuzzy Linguistic Interface for Data Bases in Nuclear Safety Problems. *Fuzzy Logic and Intelligent Technologies in Nuclear Science - Proceedings of the 1st International FLINS Workshop Mol, Belgium, September 14-16, 1994.* Edited by Da Ruan, Pierre D'hondt, Paul Govaerts, Etienne E. Kerre. World Scientific, p. 212-215.

[101] Belenki A. and Ryjov A. Fuzzy Logic in Monitoring the Non-Spread of Nuclear Weapons. *Fuzzy Logic and Intelligent Technologies in Nuclear Science - Proceedings of the 1st International FLINS Workshop Mol, Belgium, September 14-16, 1994.* Edited by Da Ruan, Pierre D'hondt, Paul Govaerts, Etienne E. Kerre. World Scientific, p. 219-222.

[102] Kudrjavcev V., Ryjov A., Kozlov V. and A. Strogalov A. An Expert System for the Evaluation of the Negative Effects of Environment on Person During the Liquidation of Nuclear, Industrial and Ecological Accidents. *Fuzzy Logic and Intelligent Technologies in Nuclear Science - Proceedings of the 1st International FLINS Workshop Mol, Belgium, September 14-16, 1994.* Edited by Da Ruan, Pierre D'hondt, Paul Govaerts, Etienne E. Kerre. World Scientific, p. 266-270.

[103] Ryjov A. Optimal Description of Objects in Human-Machine Information Systems. *Application of Fuzzy Systems - Proceedings of the International Conference on Application of Fuzzy Systems - ICAFS-94 held at the University of Tabriz, Tabriz, Iran, October 17-19, 1994.* p. 246-249.

[104] Ryjov, A., Belenki, A., Hooper, R., Pouchkarev, V., Fattah, A. and Zadeh, L.A. *Development of an Intelligent System for Monitoring and Evaluation of Peaceful Nuclear Activities (DISNA)*, IAEA, STR-310, Vienna, 1998, 122 p.

[105] Rueda A., Pedrycz W. Fuzzy Coordinator in Control Problems. *North American Fuzzy Logic Processing Society (NAFIPS'92). Proceedings of a Conference held in PUERTO VALLARTA, MEXICO, December 15-17, 1992,* NASA Conference Publication 10112, V. 1, p. 322-329.

[106] Ruspini E.H. A new approach to clustering. *Information and Control.* 1969, v.2, p. 22 - 32.

[107] Ruspini E.H. Numerical methods for fuzzy clustering *Information Sciences.* 1970, v.2, p. 319 - 350.

[108] Saaty T.L. Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems,* 1978, V.1, p. 57-69.

[109] Saaty T.L. Measuring the fuzziness of sets. *Journal of Cybernetics,* 1974, V.4, p. 53-61.

[110] Sanchez E. Inverses of fuzzy relations. Applications to possibility distribution and medical diagnosis. *Fuzzy Sets and Systems,* 1979, V.2, p.75-86.

[111] Skala H.J. On many-valued logic, fuzzy logic and their applications. *Fuzzy Sets and Systems,* 1978, V.1, p. 129-149.

[112] Thole U., Zimmermann H.J., Zysno P. On the suitability of minimum and products operators for the intersection of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems,* 1979, p. 1-14.

[113] Zadeh L.A. Approximate reasoning in in fuzzy logic. *Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence,* Tokyo, 1979.

[114] Zadeh L.A. A theory of approximate reasoning. *Machine Intelligence,* 1979, v.9, p. 149 - 194.

[115] Zadeh L.A. Calculus of fuzzy restrictions. *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes,* Ed. by Zadeh L.A. and al. New York: Academic Press, 1975, p. 1-41.

[116] Zadeh L.A. Fuzzy logic and approximate reasoning. *Synthese,* 1975, v. 80, p. 407 - 428.

[117] Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, v.8, p. 338 - 353.